

درس اول : هندسه تحلیلی	۱
مفاهیم مربوط به نقطه	۱
بررسی اوضاع نسبی دو خط	۳
نوشتن معادله ی خط	۴
فاصله ها	۵
نکات مربوط به خطوط	۶
درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و تابع درجه ی دوم	۶
معادله ی درجه ی دوم	۶
تابع درجه ی دوم	۱۰
درس سوم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۱۵
معادلات گویا	۱۵
معادلات رادیکالی (گنگ) (اصم)	۱۶

این پک به صورت کامل برای تمام دروس تجربی با یک قیمت حداقلی که تمام افراد توانایی پرداخت آن را دارند منتشر شده بنابراین استفاده رایگان از آن مورد رضایت ما نخواهد بود جهت تهیه روی همین متن قرمز لمس یا کلیک کنید

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی مفاهیم مربوط به نقطه

۱ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.

۲ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

۳ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

الف - اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب - آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۴ طول جغرافیایی تبریز تقریباً 46° درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود 38° درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت $(46, 38)$ نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت $(61, 25)$ است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر 110 کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.

۵ نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

۶ در یکی از جاده‌های کشور، تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف روی نقشهٔ مرکز امداد به‌صورت $P(50, 30)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(10, -20)$ و $B(80, 90)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند)

۷ الف) فاصلهٔ نقطه $N(-6, 8)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

ب) فاصلهٔ نقطه $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

۸ اگر $A(7, -2)$ و $B(12, 10)$ باشد.

الف - مختصات نقطه‌ی وسط AB را بدست آورید.

ب - طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

۹ دایره‌ای به مرکز $O(3, -1)$ از نقطه‌ی $A(8, 6)$ گذشته است. مساحت دایره چقدر است؟

۱۰ نقاط $A(3, 3)$ ، $B(-1, 1)$ و $O(0, 0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱۱ خط L به معادله‌ی $2y - 3x = 1$ و خط T به معادله‌ی $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف - m را طوری بدست آورید که دو خط موازی باشند.

ب - m را طوری بدست آورید که دو خط بر یکدیگر عمود باشند.

۱۲ فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $3y - 2x = 11$ و $x + 2y = 5$ چقدر است؟

۱۳ سه نقطه $A(-1, -2)$ ، $B(2, 0)$ و $C(1, -5)$ سه رأس یک مثلث هستند. این مثلث چه نوع مثلثی است؟

۱۴ خطی با شیب $-\frac{3}{4}$ از نقطه‌ی $A(2, \frac{5}{2})$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند.

طول پاره خط AB چقدر است؟

۱۵ نقطه‌ی $A(a, 2a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه $B(2, 1)$ و $C(-1, 4)$ است. شعاع دایره چقدر است؟

۱۶ نقاط $A(2, -1)$ ، $B(0, 1)$ و $C(-1, 1)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه‌ی CM را بدست آورید.

۱۷ نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(1, 1)$ و $B(3, -1)$ به یک فاصله باشد.

۱۸ نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

۱۹ نشان دهید مثلث با رئوس $A(-2, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(4, -1)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

۲۰ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(4, 7)$ و $B(-2, 3)$ هستند.

الف- اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب- آیا نقطه $C(-1, 8)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۲۱ نقاط $(0, 0)$ و $(6, 0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۲۲ نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید:

الف - محیط مثلث ABC را بدست آورید.

ب - ABC چه نوع مثلثی است؟

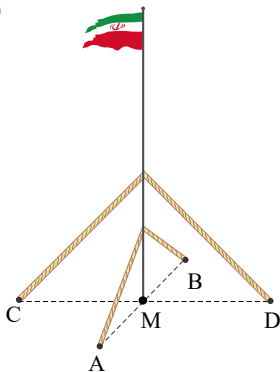
پ - مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲۳ ثابت کنید نقاط $A(6, -13)$ ، $B(-2, 2)$ ، $C(13, 10)$ و $D(21, -5)$ رئوس یک مربع‌اند.

۲۴ نقاط $(0, 0)$ و $(3, 0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. این مسئله چند جواب دارد؟

۲۵ نقاط $A(2, 3)$ و $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم مستطیل را بیابید.

۲۶ یک میله پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه $A(-3, -2)$ و $B(5, 2)$ و $C(0, 1)$ و D در زمین محکم شده است، به‌طوری که فاصله هریک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله، مختصات نقطه D را بدست آورید.



۲۷ اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.

۲۸ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف) قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ برابر است.

۲۹ نقطه‌ی $M(-4, 1)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی A و $B(-3, 2)$ است. مختصات نقطه‌ی A را بیابید.

۳۰ قرینه‌ی نقطه‌ی $C(3, -1)$ نسبت به نقطه‌ی $M(5, 2)$ را بدست آورید.

۳۱ اگر $A(m+1, 6)$ و $B(m-3, 2)$ فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط AB از مبدأ مختصات ۵ باشد، m را بدست آورید.

۳۲ نقاط $A(5, -2)$ و $B(-1, 10)$ در صفحه‌ی مختصات داده شده‌اند. اگر خطی به معادله‌ی $y = nx + 10$ از وسط AB بگذرد، مقدار n را بدست آورید.

۳۳ اگر $A(3, 7)$ و $B(5, -1)$ باشد، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بدست آورید.

۳۴ اگر نقطه‌ی $(2, 3)$ وسط پاره‌خطی باشد که یک سر آن روی محور طول‌ها و سر دیگر آن روی محور عرض‌ها باشد، معادله‌ی این خط را بنویسید.

۳۵ اگر $A(3, 5)$ و $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. معادله‌ی میانه‌ی BM را بنویسید.

۳۶ نقطه‌ی A به طول ۴ روی محور x ها و نقطه‌ی B به عرض ۲- روی محور y ها است. معادله‌ی خطی که از وسط AB گذشته و بر آن عمود باشد را بنویسید.

۳۷ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.

الف- فاصله‌ی مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.

ب- معادله‌ی عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

۳۸ نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(-4, -3)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۳۹ مثلث با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید.

الف - مختصات M ، نقطه‌ی وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب - طول میانه‌ی AM را محاسبه کنید.

پ - معادله‌ی میانه‌ی AM را بدست آورید.

۴۰ الف - نقطه‌ی $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطه‌ی A را بیابید.

ب - قرینه‌ی نقطه‌ی $C(1, 2)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-1, 4)$ را بدست آورید.

۴۱ مساحت مثلث ABC به مختصات $A(0, 1)$ ، $B(3, 4)$ و $C(-1, 1)$ را به دست آورید.

بررسی اوضاع نسبی دو خط

۴۲ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$L: 2x - y = 1 \quad T: y = 2x - 3 \quad \Delta: x + 2y = 0$$

۴۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمود هستند.

۴۴ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف

$$L: y = 5x - 2 \quad T: y = \frac{-1}{5}x + 3$$

ب

$$L: y = \frac{1}{2}x + 7 \quad T: x - 2y = 1$$

پ

$$L: 2x - 3y + 3 = 0 \quad T: 3x + 2y = 0$$

ت

$$L: x = 1 \quad T: y = -3$$

ث

$$L: y = 3x + 1 \quad T: x = 3y - 1$$

۴۵ فاصله‌ی بین دو خط موازی $3x - 4y + 10 = 0$ و $(2m + 1)x - 3my - 15 = 0$ چقدر است؟

۴۶ اگر خط گذرنده از نقطه‌ی $A(0, 2)$ و به معادله‌ی $(n + 1)y = x + 4$ بر خط $y = (2m - 7)x + 3$ عمود باشد، مقدار m چقدر است؟

۴۷ وضعیت هر جفت از خط‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$\ell: 3x - y = 7 \quad d: y = 3x - 1 \quad \Delta: x + 3y = 4$$

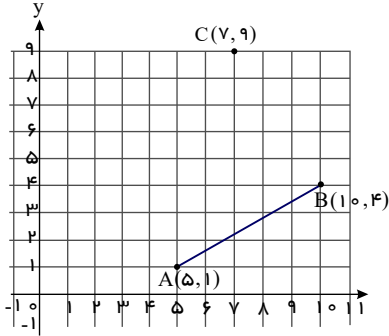
۴۸ خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف - m را طوی بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب - به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۴۹ مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند. الف - شیب ضلع AB را

بنویسید.



ب - شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

پ - اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

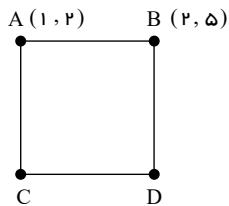
ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

نوشتن معادله ی خط

۵۰ معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $(2, -3)$ و موازی با خط گذرنده از نقطه های $(1, 4)$ و $(-1, 5)$ رسم شود.

۵۱ عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطه ی $(5, -1)$ و عمود بر خط $y = 2x + 1$ چقدر است؟

۵۲ اگر نقاط $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ دو رأس مجاور یک مربع باشد معادله اضلاع AB و AC و محیط و مساحت مربع را به دست آورید؟



۵۳ به طور شهودی می توان دید که از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می کند؛ بنابراین:

الف) با داشتن مختصات نقطه از یک خط باید بتوان معادله آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادله ی یک خط می توان با مشخص کردن نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

۵۴ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید:

الف)

$$L_1 : y = 2x + 1$$

ب)

$$L_2 : y = 2x - 3$$

پ)

$$L_3 : y = 1$$

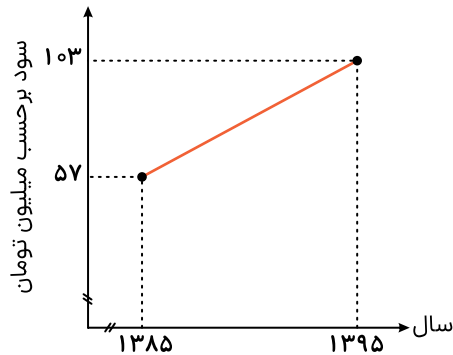
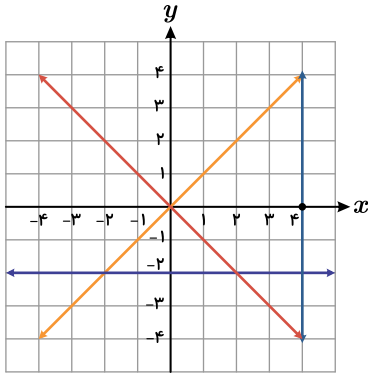
ت)

$$L_4 : x = -2$$

ث)

$$L_5 : x + 2y = 2$$

۵۵ معادله هر یک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.



۵۶ سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

۵۷ معادله‌ی خطی را بنویسید که محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3}{2}$ قطع کند و از نقطه‌ی $(-1, 5)$ بگذرد.

۵۸ خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(-2, 3)$ و $(7, -3)$ محور x ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۵۹ نقاط $A(4, 0)$ ، $B(0, 3)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB چقدر است؟

فاصله‌ها

۶۰ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

۶۱ نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.

۶۲ فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟

الف) $-\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{8}{5}$ (د) $\frac{6}{5}$

۶۳ اگر خط $4x + 3y = -1$ بر دایره به مرکز $(1, 2)$ مماس باشد اندازه شعاع دایره را بیابید.

۶۴ یکی از اضلاع مربع، بر خط $y = 2x - 1$ واقع است، اگر نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

۶۵ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = x + 2$ واقع است. اگر $A(2, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

۶۶ فاصله نقطه $(-1, 2)$ از خط $3x - 4y + 6 = 0$ برابر کدام عدد است؟

۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۷ خط $4x - 3y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.

۶۸ نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

۶۹ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3, 1)$ از خط $3x - 4y = 20$ را بدست آورید.

۷۰ خط $6x - 8y + 5 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $P(1.5, -2)$ مماس می‌باشد. شعاع دایره را بدست آورید.

۷۱) فاصله‌ی دو خط به معادلات $12x - 5y + 20 = 0$ و $12x - 24x + 12 = 0$ را بدست آورید.

۷۲) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3, -2)$ از خط $4x + my + 2 = 0$ برابر ۴ باشد، در اینصورت مقدار m را بدست آورید.

۷۳) معادله‌ی یک ضلع مربع $y = x + 2$ و نقطه‌ی $A(3, -1)$ یک رأس مربع است. مساحت مربع و اندازه‌ی قطر مربع را بدست آورید.

۷۴) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(4, 7)$ را از خط به معادله $2x - y = -4$ بدست آورید.

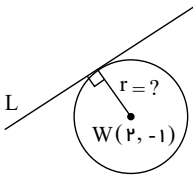
۷۵) یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = -2x - 1$ واقع است. اگر $A(4, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را بدست آورید.

۷۶) فاصله‌ی نقطه‌ی $P(7, -4)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر بدست آورید.

الف) $L: 2x + y = 5$

ب) $T: x = 5$

پ) $\Delta: y = 0$



۷۷) خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

۷۸) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب - فاصله‌ی این دو خط را محاسبه کنید.

۷۹) الف) می‌دانیم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطه غیر

هم‌طول A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\dots}{x_B - x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای برابر باشند.

۸۰) از پایه‌ی نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور y ها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آنگاه h خط L نامیده می‌شود.

۸۱) فاصله‌ی دو خط $3x + 4y + 18 = 0$ و $6x + 8y = 4$ را بدست آورید.

۸۲) فاصله‌ی دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ را بیابید.

نکات مربوط به خطوط

۸۳) خطوط $(2m - 1)x - y = 0$ و $2x + y - 3 = 0$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده‌اند، مقدار m را بیابید.

۸۴) دو تابع $y = x^2 + ax + b$ و $y = x + 2b$ مفروضند. a و b را طوری بیابید که نمودارهای این دوتابع روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۲

یکدیگر را قطع کنند.

۸۵) دو خط به معادله‌ی $4x - y - 3 = 0$ و $(m + 1)x - 2y = 0$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده‌اند، مقدار m را بیابید.

درس دوم: معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

۸۶) جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با است.

۸۷) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) معادله $x^2 + 6x + 7 = 0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۸۸) مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ برابر با چند است؟

(د) -۳

(ج) -۲

(ب) ۳

(الف) ۲

۸۹) مجموع یک عدد صحیح با معکوسش برابر با -۲ می‌باشد، با تشکیل معادله و حل آن، مقدار این عدد را بیابید.

۹۰ درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف معادله $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است.

۹۱ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

۹۲ معادله مقابل را حل کنید.

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

۹۳ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 6x + 5 = 0$ بحث کنید.

۹۴ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - 5 = 0$ بحث کنید.

۹۵ معادله‌ی زیر را با روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 5x = 24$$

۹۶ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 7x + 1 = 0$ بحث کنید.

۹۷ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $-x^2 + 2x - 1 = 0$ بحث کنید.

۹۸ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش تجزیه حل کنید.

$$4y^2 + 8y = 21$$

۹۹ معادله درجه دوم زیر را با روش مربع کامل حل کنید.

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

۱۰۰ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش مربع کامل حل کنید.

$$4x^2 - 16x - 33 = 0$$

۱۰۱ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش Δ حل کنید.

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

۱۰۲ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش Δ حل کنید.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

۱۰۳ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش Δ حل کنید.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

۱۰۴ اگر معادله‌ی $x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مساوی باشد، مقدار m را بدست آورید.

۱۰۵ مقدار m را طوری بدست آورید که معادله $x^2 - 4x + m + 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد.

۱۰۶ مقدار k را طوری بدست آورید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(k-1)x^2 + (2k+1)x + k - 2 = 0$ برابر صفر باشد و سپس ریشه‌ی دیگر را بدست آورید.

۱۰۷ مقدار m را طوری بدست آورید که معادله‌ی $(m-1)x^2 + (m-4)x - 3m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و قرینه باشد و سپس این ریشه‌ها را بدست آورید.

۱۰۸ محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. طول و عرض زمین را بدست آورید.

۱۰۹ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2x^3 + x^2 - 3x = 0$$

۱۱۰ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^3 - 4x = 0$$

۱۱۱ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10$$

۱۱۲ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۱۱۳ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^6 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۱۱۴ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

۱۱۵ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^6 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = u$$

۱۱۶ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

۱۱۷ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(4 - x^2)^2 + 8(4 - x^2) + 15 = 0$$

۱۱۸ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(2x^2 + 1)^2 - 12(2x^2 + 1) + 27 = 0$$

۱۱۹ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^6 + 10x^2 + 9 = 0$$

۱۲۰ ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بدست آورید.

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

۱۲۱ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(3x^2 + 1)^2 - 17(3x^2 + 1) + 52 = 0 \quad u = 3x^2 + 1$$

۱۲۲ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^6 + 3x^2 + 2 = 0 \quad x^2 = u$$

۱۲۳ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \quad x^3 = u$$

۱۲۴ معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ب) $x^6 + 3x^2 + 2 = 0$

۱۲۵ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۱۲۶ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ باشند.

۱۲۷ در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

۱۲۸ در معادله درجه دو به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۲ باشد و $c = 2b$ ، در این صورت ریشه دیگر این معادله را بیابید.

۱۲۹ به ازای چه مقداری از k در معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌های معادله رابطه‌ی $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است؟

- ۱۳۰ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند. m را چنان بیابید که $\alpha\beta^2 + 4 = 0$
- ۱۳۱ در معادله‌ی $2x^2 - 9x + m + 3 = 0$ ، مقدار m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌ها نصف ریشه‌ی دیگر باشد.
- ۱۳۲ در معادله‌ی $4x^2 - 8x - m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر باشد، m را بیابید.
- ۱۳۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را بدست آورید.
- ۱۳۴ در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار m چقدر است؟
- ۱۳۵ در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد کوچک‌تر از ریشه‌ی دیگر باشد، هر دو ریشه و m را بدست آورید.
- ۱۳۶ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.
- ۱۳۷ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + kx + 8 = 0$ مربع ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار k را بدست آورید.
- ۱۳۸ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ باشند و بین ریشه‌ها رابطه‌ی $x_1 - x_2 = 2\sqrt{3}$ برقرار باشد، مقدار m را بدست آورید.
- ۱۳۹ اگر یکی از ریشه‌های معادله $mx^2 - 3x + 1 = 0$ دو برابر دیگری باشد، مقدار m را بیابید.
- ۱۴۰ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} + \beta^2 + \frac{1}{\beta}$ را بدست آورید.
- ۱۴۱ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را بدست آورید.
- ۱۴۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید.
- ۱۴۳ در معادله‌ی درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌های این معادله را بیابید.
- ۱۴۴ در معادله‌ی $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ اگر حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۵ باشد، ۲ ریشه‌ی معادله را بدست آورید.
- ۱۴۵ اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگر باشند، مجموع این دو ریشه را بیابید.
- ۱۴۶ اگر $\sqrt{2}$ واسط هندسی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ باشد، مقدار m را بدست آورید.
- ۱۴۷ اگر $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ باشد، مقدار m را بدست آورید.
- ۱۴۸ اگر در معادله‌ی $3x^2 - 15x + m = 0$ ، یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار m چقدر است؟
- ۱۴۹ در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m چقدر است؟
- ۱۵۰ مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند؟
- ۱۵۱ معادله‌ی درجه دوم بنویسید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.
- ۱۵۲ معادله‌ی درجه دوم بنویسید که ریشه‌هایش به صورت $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ باشند.
- ۱۵۳ معادله‌ی درجه دوم تشکیل دهید که ریشه‌هایش $2 - \sqrt{4-a}$ ، $2 + \sqrt{4-a}$ باشند.
- ۱۵۴ در معادله‌ی درجه دوم $(m-2)2x^2 + 3x - 5 = 0$ مقدار m را چنان بیابید که:
- الف- ریشه‌های معادله معکوس هم باشند.
- ب- مجموع ریشه‌ها برابر ۲ باشد.
- ۱۵۵ مساحت یک اتاق ۲۴ متر مربع و محیط اتاق ۲۰ متر است. ابعاد اتاق را بدست آورید.
- ۱۵۶ معادله‌ی درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.
- ۱۵۷ اگر α و β جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۱۵۸ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

۱۵۹ معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های $x^2 + x - 1 = 0$ باشد.

۱۶۰ معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 12x = 7$ باشد.

۱۶۱ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشد.

۱۶۲ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $1/5$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

۱۶۳ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$ باشند.

تابع درجه ی دوم

۱۶۴ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف - مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب - مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۱۶۵ موشکی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله‌ی آن به صورت مقابل است.

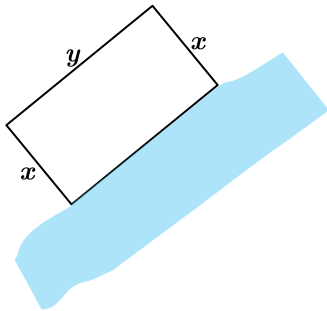
$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

۱۶۶ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



۱۶۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مقدار ماکزیمم تابع $y = -2x^2 + 8x - 5$ برابر ۳ است.

ب) اگر $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$ باشد مقدار $\frac{a}{b}$ برابر $\frac{5}{4}$ است.

۱۶۸ مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابع داده شده را مشخص کنید.

$$x^2 - 4x + 8y - 4 = 0$$

۱۶۹ کمترین یا بیشترین مقدار تابع $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$ را بدست آورید.

۱۷۰ کمترین یا بیشترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ را بدست آورید.

۱۷۱ max یا min تابع $f(x) = x^2 - 4x + 9$ را مشخص کنید.

۱۷۲ max یا min تابع $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ را بدست آورید.

۱۷۳ نقطه‌ی مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع اول قرار دارد. a را بدست آورید.

۱۷۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + ax + 4$ مینیمی برابر ۳ دارد. مقدار a را بدست آورید.

۱۷۵ بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، چقدر است؟

۱۷۶ مقدار a را طوری بدست آورید که نقطه‌ی مینیم نمودار تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط $y = 1$ واقع باشد.

۱۷۷ مقدار $\max$ یا $\min$ تابع $f(x) = 4 + 8x - x^2$ را بیابید.

۱۷۸ مقدار $\max$ یا $\min$ تابع زیر را بیابید.

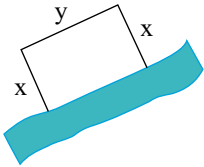
$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3$$

۱۷۹ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هریک را مشخص کنید.

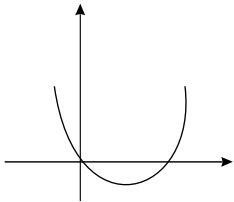
الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

۱۸۰ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



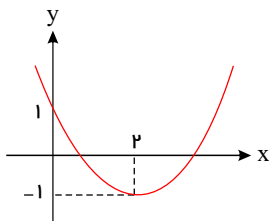
۱۸۱ شکل روبه‌رو مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.



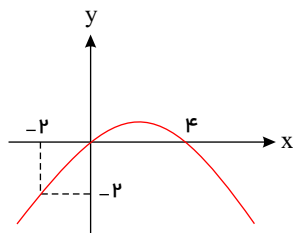
الف) علامت a و b را تعیین کنید.

ب) مقدار c را بیابید.

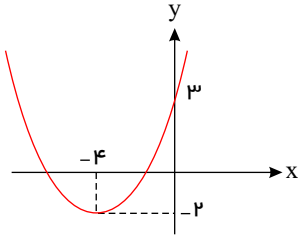
۱۸۲ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۱۸۳ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۱۸۴ در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۱۸۵ در تابع $y = ax^2 + x + c$ ، ضرایب‌های a و c را طوری تعیین کنید که منحنی از نقطه‌ی $A(1, -1)$ بگذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

۱۸۶ تابع $f(x) = ax^2 + bx$ مفروض است. a و b را طوری بیابید که منحنی نمایش تابع از نقطه‌ی $A(2, -1)$ بگذرد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند.

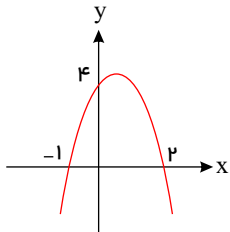
۱۸۷ اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، هر یک از پارامترهای a و b و c را طوری تعیین کنید تا نمودار تابع محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -3 و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه‌ی $(-1, 4)$ هم بگذرد.

۱۸۸ اگر $f(x) = x^2 + bx + c$ باشد، b و c را طوری بیابید که سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند.

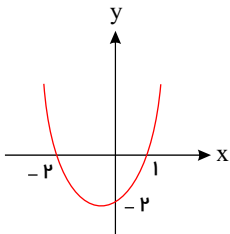
۱۸۹ معادله‌ی سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و از نقطه‌ی $(3, 1)$ نیز بگذرد. معادله‌ی سهمی را بصورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم.

۱۹۰ نقطه‌ی $(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + bx + c$ است. b و c را بدست آورید.

۱۹۱ معادله‌ی سهمی شکل زیر را بدست آورید.

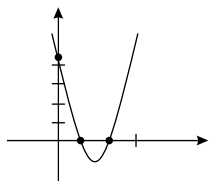


۱۹۲ باتوجه به نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضرایب a و b و c را بدست آورید.

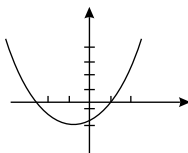


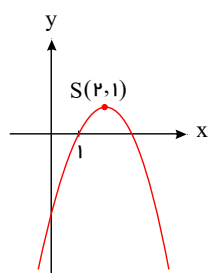
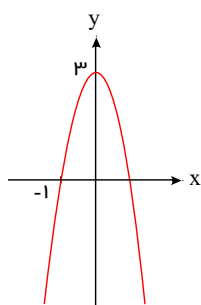
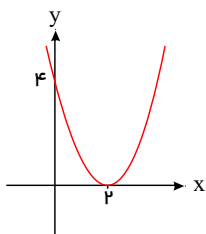
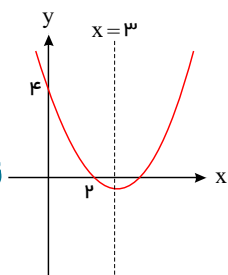
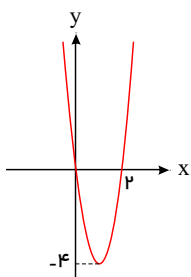
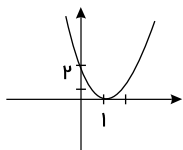
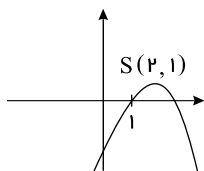
۱۹۳ با توجه به نمودارهای سهمی زیر به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ ، برای هر مورد ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

الف



ب





ضابطه جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.

۱۹۴

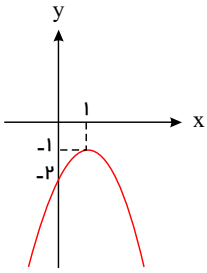
الف

ب

پ

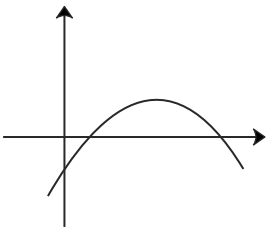
ت

ث

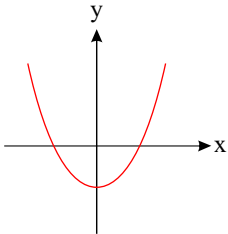


جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید. ۱۹۵

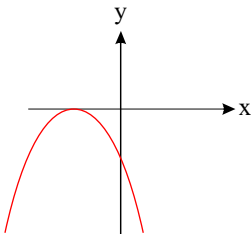
الف در سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که نمودار آن به صورت مقابل است علامت $b \times c$ می‌باشد.



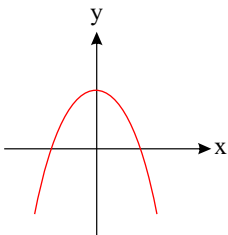
در شکل زیر روی علامت a ، b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید. ۱۹۶



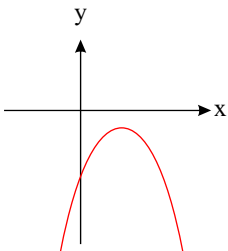
در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید. ۱۹۷



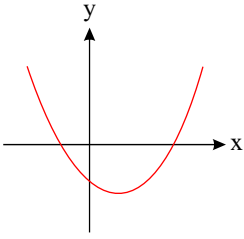
در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید. ۱۹۸



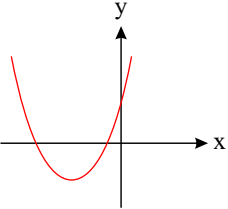
در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید. ۱۹۹



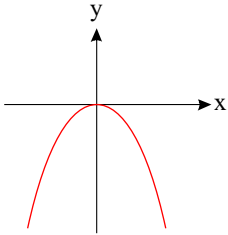
۲۰۰ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



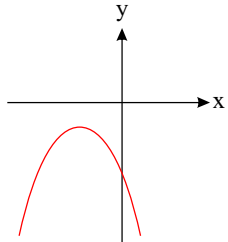
۲۰۱ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۰۲ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۰۳ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۰۴ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۲۰۵ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$$

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$$

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$\sqrt{t+4} = 3$$

$$k = \sqrt{6k-8}$$

ج

$$x + \sqrt{x} = 6$$

ج

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

ج

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

۲۰۶ به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x = 1$ است؟

۲۰۷ به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

۲۰۸ یک خط متروی بین شهری، ۷۵ کیلومتر طول دارد. اگر در مسیر برگشت، به سرعت قطار ۱۰ کیلومتر در ساعت افزوده شود، آنگاه زمان بازگشت ۱۵ دقیقه کمتر می‌شود. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و برگشت این قطار.

۲۰۹ دو نفر با هم می‌توانند در ۴ ساعت، ساختمانی را رنگ‌آمیزی کنند. اگر سرعت کار یکی از آنها ۴ برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام بدهند.

۲۱۰ علی و رضا ویرایش یک مجله ادبی را انجام می‌دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می‌دهد.

۲۱۱ با تشکیل یک معادله، عدد صحیحی پیدا کنید که مجموع آن با جذرش برابر ۲۰ باشد.

۲۱۲ فاصله بین دو شهر A و B ، ۱۸۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A با سرعت ثابت به سمت شهر B در حال حرکت است. نیم ساعت بعد، اتومبیل دیگری که سرعت آن ۴ کیلومتر در ساعت بیشتر از اتومبیل اول است از شهر A به سمت شهر B حرکت می‌کند. اگر زمان رسیدن هر دو اتومبیل یکسان باشد، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به دست آورید.

۲۱۳ معادله زیر را حل کنید.

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

۲۱۴ معادله $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$ را حل کنید.

۲۱۵ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

۲۱۶ معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

معادلات رادیکالی (گنگ) (اصم)

۲۱۷ الف - عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

ب - عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

۲۱۸ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$$

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۲۱۹ معادله $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$ را حل کنید.

۲۲۰ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$\sqrt{2 - x} = x$$

۲۲۱ معادله $\sqrt{x - 2} + \sqrt{1 - x} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) صفر

۲۲۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه جواب معادله $\sqrt{x + 3} + 1 = 0$ برابر تهی است.

۲۲۳ مجموعه جواب معادله $2x = \sqrt{4x - 1}$ را به دست آورید.

۲۲۴ معادله‌ای شامل تفاضل دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۳ یکی از ریشه‌های آن باشد.

۲۲۵ زمانی که یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر سقوط آزاد می‌کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد، به طوری

$$t = \sqrt{16 - \frac{h}{5}}$$

۲۲۶ اگر فاصله بین دو نقطه $(a, 5)$ و $(4, a - 3)$ برابر $2\sqrt{10}$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۲۲۷ توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی‌اند.

الف)

$$\sqrt{t} + 2 = 0$$

ب)

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x + 3} + 1 = 0$$

پ)

$$\sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2} = 0$$

۲۲۸ معادله $\sqrt{x + 2} + 4 = x$ را حل کنید.

۲۲۹ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + 9} = 5$$

۲۳۰ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۲۳۱ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x - \sqrt{x} = 20$$

۲۳۲ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1 + x} = \sqrt{x + 9}$$

۲۳۳ معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

۲۳۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف

ب

پ

ت

ث

۲۳۵

الف

ب

پ

ت

ث

ج

چ

ح

$$2\sqrt{2t-1}-t=1$$

$$2x=1-\sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$$

$$2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2+x}=x$$

$$\sqrt{15+\sqrt{2x+80}}=5$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+6}=6$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=2$$

$$x(x^2-9)\sqrt{x-2}=0$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}=x$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$$

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - 13}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow OM = 13$$

۲

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} \rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} \rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} \rightarrow BC = \sqrt{20}$$

$$AB = AC, \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow \text{مساوی الساقین قائم الزاویه} = \triangle ABC$$

۳

الف) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}, \quad AB = 2R \rightarrow 2\sqrt{13} = 2R \rightarrow R = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow O(4, 1)$$

مرکز دایره

ب) $OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow \text{نقطه } C \text{ روی محیط دایره قرار دارد}$$

۴

تبریز $A(46, 38)$ و چابهار $B(61, 25)$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(46 - 61)^2 + (38 - 25)^2} = \sqrt{225 + 169}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{394} \rightarrow AB \simeq 19,85$$

$$\rightarrow \text{فاصله تبریز تا چابهار} \simeq 19,85 \times 110 \simeq 2183,5 km$$

۵

$$O = (3, 1) \quad R = OA = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{10}$$

۶

$$AP = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(50 - 10)^2 + (30 + 20)^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100}$$

$$BP = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(50 - 80)^2 + (30 - 90)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

پس مسیر AP کوتاه تر است و پایگاه امداد هوایی A مناسب تر است.

۷ (الف)

$$ON = \sqrt{(x_N - x_O)^2 + (y_N - y_O)^2} = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$OE = \sqrt{(x_E - 0)^2 + (y_E - 0)^2} = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

ب.

۸
الف -

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + 12}{2} \rightarrow x_M = \frac{19}{2} \rightarrow M(9.5, 4)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 10}{2} \rightarrow y_M = 4$$

ب -

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 12)^2 + (-2 - 10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \rightarrow \boxed{AB = 13}$$

۹

$$AO = \text{شعاع دایره} \rightarrow AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (6 - (-1))^2}$$

$$\rightarrow AO = \sqrt{25 + 49} \rightarrow AO = \sqrt{74} \rightarrow r = \sqrt{74}$$

$$S = \pi r^2 = \pi(\sqrt{74})^2 \rightarrow \boxed{S = 74\pi}$$

۱۰

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{18}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{20}$$

مشاهده می شود که: $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{20})^2$ یعنی $OA^2 + OB^2 = AB^2$
پس AB = قطر مستطیل و OA و OB = ضلع مستطیل ←

$$S = OA \times OB = \sqrt{18} \times \sqrt{2} \rightarrow S = \sqrt{36} \rightarrow \boxed{S = 6}$$

۱۱ الف -

$$L: 2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m_L = \frac{3}{2}$$

$$T: y = mx + 5 \rightarrow m_T = m \rightarrow y = mx + 5 \rightarrow m_T = m$$

$$\text{دو خط موازی} \rightarrow m_L = m_T \rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

ب -

$$\text{دو خط عمود} \rightarrow m_L \cdot m_T = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \times m = -1 \rightarrow \boxed{m = -\frac{2}{3}}$$

۱۲

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y - 2x = 11 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3y - 2x = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 7y = 21 \\ y = 3 \end{matrix} \rightarrow x + 2(3) = 5 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

محل تلاقی دو خط $A(-1, 3)$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} \rightarrow OA = \sqrt{10}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} \rightarrow AB = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-2 + 5)^2} = \sqrt{4 + 9} \rightarrow AC = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{1 + 25} \rightarrow BC = \sqrt{26}$$

۱۳

$AB = AC \rightarrow$ مثلث متساوی الساقین

$\rightarrow$ مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow$ مثلث قائم الزاویه

۱۴

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2) \rightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 4} \quad x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}(0) + 4 \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{A(0, 4)}$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x + 4 \rightarrow \frac{3x}{4} = 4 \rightarrow x = \frac{16}{3} \rightarrow \boxed{B(\frac{16}{3}, 0)}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0 - \frac{16}{3})^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 16}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{\frac{256 + 144}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} \rightarrow \boxed{AB = \frac{20}{3}}$$

۱۵

$$AB = R, AC = R \rightarrow AB = AC \rightarrow \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (2a - 4)^2} \rightarrow (a - 2)^2 + (2a - 1)^2 = (a + 1)^2 + (2a - 4)^2$$

$$\rightarrow \cancel{a^2} - 4a + 4 + \cancel{4a^2} - 4a + 1 = \cancel{a^2} + 2a + 1 + \cancel{4a^2} - 16a + 16 \rightarrow -8a + 5 = -14a + 17$$

$$\rightarrow 14a - 8a = 17 - 5 \rightarrow 6a = 12 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\rightarrow R = AB = \sqrt{(a - 2)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (4 - 1)^2} \rightarrow \boxed{R = 3}$$

۱۶

میانه CM از راس C به وسط ضلع AB رسم می شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \rightarrow M(1, 0)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

$$CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 1} \rightarrow \boxed{CM = \sqrt{5}}$$

۱۷

$$y = 2x \rightarrow C(\alpha, 2\alpha), A(1, 1), B(3, -1)$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2}$$

$$\rightarrow (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + \cancel{4\alpha^2} - 4\alpha + 1 = \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 + \cancel{4\alpha^2} + 4\alpha + 1$$

$$\rightarrow 2 - 6\alpha = 10 - 2\alpha \rightarrow 2 - 10 = 6\alpha - 2\alpha \rightarrow -8 = 4\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = -2} \rightarrow \boxed{C(-2, -4)}$$

۱۸

$$y = 2x + 1 \rightarrow C(\alpha, 2\alpha + 1), A(3, 0), B(-1, 0)$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\rightarrow (\alpha - 3)^2 + \cancel{(2\alpha + 1)^2} = (\alpha + 1)^2 + \cancel{(2\alpha + 1)^2} \rightarrow (\alpha - 3)^2 = (\alpha + 1)^2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 = \cancel{\alpha^2} + 2\alpha + 1 \rightarrow 9 - 1 = 2\alpha + 6\alpha \rightarrow 8 = 8\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \rightarrow \boxed{C(1, 3)}$$

۱۹

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$$AB = BC, \quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow \text{متساوی الساقین قائم الزاویه} = \triangle ABC$$

۲۰

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} \rightarrow AB = 2\sqrt{13}, \quad AB = 2R \rightarrow 2R = 2\sqrt{13} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{13}}$$

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{O(1, 5) \text{ مرکز دایره}}$$

$$\text{ب) } OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (5 - 8)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow \text{نقطه } C \text{ روی محیط دایره قرار دارد}$$

۲۱ در مثلث متساوی الاضلاع طول سه ضلع با هم برابر است پس داریم:

$$A(0, 0), \quad B(6, 0), \quad C(x_c, y_c)$$

$$AB = \sqrt{(0 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$AC = \sqrt{(0 - x_c)^2 + (0 - y_c)^2} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$BC = \sqrt{(6 - x_c)^2 + (0 - y_c)^2} = \sqrt{(6 - x_c)^2 + y_c^2}$$

$$AC = BC \rightarrow x_c^2 + y_c^2 = (6 - x_c)^2 + y_c^2 \rightarrow x_c^2 = 36 - 12x_c + x_c^2$$

$$\rightarrow 12x_c = 36 \rightarrow \boxed{x_c = 3}$$

$$AB = AC \rightarrow 6 = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \rightarrow 36 = 9 + y_c^2 \rightarrow 27 = y_c^2$$

$$\rightarrow y_c = \pm\sqrt{27} \rightarrow \boxed{y_c = \pm 3\sqrt{3}}$$

مسئله دو جواب دارد: $C(3, 3\sqrt{3}), C(3, -3\sqrt{3})$

۲۲

الف)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} \rightarrow AB = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} \rightarrow AC = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\rightarrow BC = 5\sqrt{2}$$

$$\Delta_{ABC} \text{ محیط} = P = AB + AC + BC = 5 + 5 + 5\sqrt{2} \rightarrow P = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب)

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 4}{2 - 5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ m_{AC} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 3}{2 - (-2)} = -\frac{3}{4} \end{aligned} \right\} m_{AB} \cdot m_{AC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

$$\rightarrow AB \perp AC \rightarrow \hat{A} = 90^\circ \rightarrow \Delta_{ABC} = \text{قائم الزاویه متساوی الساقین}$$

$$\text{پ) } S_{\Delta_{ABC}} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 5}{2} \rightarrow S_{\Delta_{ABC}} = 12,5$$

۲۳ چون مشخص نیست چه رئوسی روبه روی هم اند، پس حتماً باید نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم.

باید نشان دهیم:

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AB = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (2 + 13)^2} = \sqrt{289} = 17$$

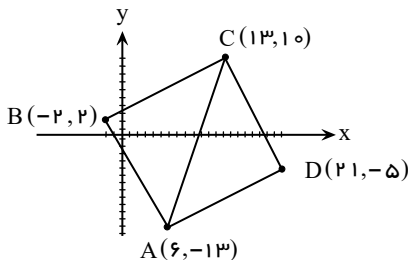
$$BC = \sqrt{(13 + 2)^2 + (10 - 2)^2} = 17$$

$$CD = \sqrt{(21 - 13)^2 + (-5 - 10)^2} = 17$$

$$DA = \sqrt{(6 - 21)^2 + (-13 + 5)^2} = 17$$

اما یک لوزی هم چهار ضلع برابر دارد. حال کافی است رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC تحقیق کنیم و نشان دهیم مثلث ABC در زاویه B قائمه است و این یعنی $ABCD$ مربع است.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(13 - 6)^2 + (10 + 13)^2} = \sqrt{578}$$



$$\text{فیثاغورس: } AC^2 \stackrel{?}{=} AB^2 + BC^2 \rightarrow 578 \stackrel{?}{=} 289 + 289 \rightarrow 578 \stackrel{\checkmark}{=} 578$$

۲۴ رأس سوم را $P(x, y)$ در نظر می گیریم. فاصله رأس سوم از دو رأس دیگر برابر است و این فاصله برابر طول ضلع مثلث است.

$$(0, 0), (x, y): \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(3, 0), (x, y): \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} \rightarrow -6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

از طرفی فاصله $(0, 0)$ و $(3, 0)$ برابر طول ضلع مثلث است.

$$(3, 0), (0, 0) : \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \rightarrow \text{طول ضلع} = 3 \xrightarrow{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9}{4} + y^2} = 3 \rightarrow y^2 = 9 - \frac{9}{4} \rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

پس مسئله دو جواب دارد.

۲۵

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + 1 = -1 + x_D \\ 3 - 2 = 0 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 1 \end{cases} \rightarrow D(4, 1)$$

۲۶

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow M(1, 0)$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{0 + x_D}{2} \rightarrow x_D = 2 \\ 0 = \frac{1 + y_D}{2} \rightarrow y_D = -1 \end{cases} \rightarrow D(2, -1)$$

۲۷

$$O \text{ مرکز دایره } \begin{cases} x_0 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_0 = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases}$$

۲۸

الف) $(-3, 6)$

۲۹

$$\begin{aligned} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{x_A - 3}{2} \rightarrow -8 = x_A - 3 \rightarrow \boxed{x_A = -5} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{y_A + 2}{2} \rightarrow 2 = y_A + 2 \rightarrow \boxed{y_A = 0} \end{aligned} \rightarrow A(-5, 0)$$

۳۰. قرینه‌ی نقطه‌ی C نسبت به نقطه‌ی M ، نقطه‌ی D است بطوری که نقطه‌ی M وسط پاره خط DC است.

$$\begin{aligned} x_M = \frac{x_D + x_C}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_D + 3}{2} \rightarrow x_D + 3 = 10 \rightarrow \boxed{x_D = 7} \\ y_M = \frac{y_D + y_C}{2} \rightarrow 2 = \frac{y_D - 1}{2} \rightarrow y_D - 1 = 4 \rightarrow \boxed{y_D = 5} \end{aligned} \rightarrow D(7, 5)$$

۳۱

$$\begin{aligned} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+1+m-3}{2} = \frac{2m-2}{2} \rightarrow \boxed{x_m = m-1} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+2}{2} \rightarrow \boxed{y_m = 4} \end{aligned} \rightarrow M(m-1, 4)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \rightarrow 5 = \sqrt{(m-1)^2 + 4^2} \rightarrow 25 = (m-1)^2 + 16 \rightarrow (m-1)^2 = 9$$

$$m-1 = 3 \rightarrow \boxed{m = 4}$$

$$m-1 = -3 \rightarrow \boxed{m = -2}$$

۳۲

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} \rightarrow x_M = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 10}{2} \rightarrow y_M = 4$$

$$\rightarrow M(2, 4)$$

نقطه‌ی $M(2, 4)$ روی خط $y = nx + 10$ قرار دارد $\rightarrow 4 = n(2) + 10 \rightarrow 4 - 10 = 2n \rightarrow \boxed{n = -3}$

۳۳

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} \Rightarrow x_M = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} \Rightarrow y_M = 3$$

$$\rightarrow \boxed{m(4, 3)}$$

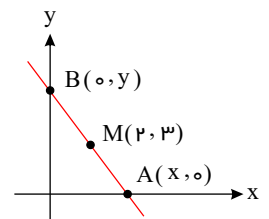
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7 - (-1)}{3 - 5} = \frac{8}{-2} \rightarrow m_{AB} = -4$$

شیب خط عمودمنصف $m \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m(-4) = -1 \rightarrow \boxed{m = \frac{1}{4}}$

معادله‌ی عمودمنصف: $y - y_M = m(x - x_M) \rightarrow y - 3 = \frac{1}{4}(x - 4) \rightarrow y - 3 = \frac{1}{4}x - 1 \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + 2}$

نقطه‌ی $M(2, 3)$ وسط AB است، داریم: ۳۴

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 2 = \frac{x + 0}{2} \rightarrow x = 4 \rightarrow \boxed{A(4, 0)} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 3 = \frac{0 + y}{2} \rightarrow y = 6 \rightarrow \boxed{B(0, 6)} \end{cases}$$



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{0 - 4} \rightarrow \boxed{m_{AB} = -\frac{3}{2}}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \rightarrow y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x + 6}$$

۳۵

میان‌ه BM از راس B به وسط ضلع AC رسم می‌شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \rightarrow M(2, 2), \quad B(-2, 1)$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{2 - 1}{2 - (-2)} = \frac{1}{4} \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 2 \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$$

۳۶

$$A(4, 0), \quad B(0, -2)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1 \rightarrow \boxed{M(2, -1)}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 4} = \frac{-2}{-4} \rightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$y - y_M = m(x - x_M) \rightarrow y - (-1) = -2(x - 2) \rightarrow y + 1 = -2x + 4 \rightarrow \boxed{y = -2x + 3}$$

۳۷

$$\text{الف) } \left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-13)}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow \boxed{OM = 13}$$

$$\text{ب) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-13)}{14 - 10} = \frac{16}{4} \rightarrow m_{AB} = 4$$

$$\text{معادله عمود بر } AB \text{ شیب } m' \rightarrow m' = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x - 2}$$

۳۸ در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کند پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0 \end{aligned} \right\} O(-1, 0)$$

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow 2x_O = x_B + x_D \rightarrow 2(-1) = -2 + x_D \rightarrow \boxed{x_D = 0}$$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow 2y_O = y_B + y_D \rightarrow 2(0) = -1 + y_D \rightarrow \boxed{y_D = 1}$$

$$\rightarrow \boxed{D(0, 1)}$$

$$\text{الف) } \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 7}{2} \rightarrow x_M = 5 \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + 11}{2} \rightarrow y_M = 6 \end{aligned} \right. \rightarrow M(5, 6)$$

$$\text{ب) } AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} \rightarrow AM = 5$$

$$\text{پ) } m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{9 - 6}{1 - 5} = \frac{3}{-4}$$

$$\rightarrow y - y_A = m_{AM}(x - x_A) \rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}(x - 1) \rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 9 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

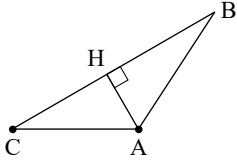
الف)

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \rightarrow 10 = x_A + 7 \rightarrow x_A = 3 \\ y_N &= \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{y_A - 2}{2} \rightarrow -8 = y_A - 2 \rightarrow y_A = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, -6)$$

ب) قرینه نقطه C نسبت به نقطه M نقطه D است، بطوری که M وسط پاره خط DC است.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_C + x_D}{2} \rightarrow -1 = \frac{1 + x_D}{2} \rightarrow -2 = 1 + x_D \rightarrow x_D = -3 \\ y_M &= \frac{y_C + y_D}{2} \rightarrow 4 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow 8 = 2 + y_D \rightarrow y_D = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(-3, 6)$$

۴۱ برای محاسبه مساحت کافی است طول قاعده (BC) و ارتفاع (AH) را به دست آوریم.



$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$BC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

برای محاسبه AH باید فاصله نقطه A از خط گذرنده از B و C را تعیین کنیم.

$$B(3, 4), C(-1, 1) : m_{BC} = \frac{4 - 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m_{BC}(x - x_0) \xrightarrow{(-1, 1)} y - 1 = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \rightarrow \frac{3}{4}x - y + \frac{7}{4} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -1 \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$(0, 1) : AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left| \frac{3}{4} \times 0 + (-1) \times 1 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times 5 = \frac{3}{2}$$

۴۲

$$L : 2x - 1 = y \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow m_L = 2$$

$$T : y = 2x - 3 \rightarrow m_T = 2$$

$$\Delta : x + 2y = 0 \rightarrow 2y = -x \rightarrow y = -\frac{1}{2}x \rightarrow m_\Delta = -\frac{1}{2}$$

$m_L = m_T \rightarrow L$ و T موازی هستند

$m_L \cdot m_\Delta = -1 \rightarrow L$ و Δ عمود بر هم هستند

$m_T \cdot m_\Delta = -1 \rightarrow T$ و Δ عمود بر هم هستند

۴۳

الف درست

۴۴

الف

$$m_L = 5, \quad m_T = -\frac{1}{5} \Rightarrow m_L \cdot m_T = 5 \times \frac{-1}{5} = -1$$

بنابراین دو خط بر هم عمودند.

ب

$$m_L = \frac{1}{2}, T: x - 2y = 1 \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m_T = \frac{1}{2}$$

$$m_L = m_T = \frac{1}{2}$$

بنابراین دو خط موازی هستند.

پ

$$L: 2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m_L = \frac{2}{3}$$

$$T: 3x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m_T = -\frac{3}{2}$$

$$m_L \cdot m_T = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

بنابراین دو خط بر هم عمودند.

ت

شیب خط L تعریف نشده و نمودار آن خطی عمود بر محور x ها است. از طرفی خط T نیز دارای شیب صفر و خطی موازی محور x ها است. در نتیجه دو خط بر هم عمود هستند.

ث

$$m_L = 3, x = 3y - 1 \Rightarrow 3y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_T = \frac{1}{3} \Rightarrow m_L \neq m_T, m_L \cdot m_T \neq -1$$

دو خط L و T نه موازی و نه عمود بر هم هستند، بلکه متقاطع غیر عمود هستند.

۴۵

$$\text{دو خط موازی} \rightarrow \frac{2m+1}{3} = \frac{-3m}{-4} \rightarrow 9m = 4m + 3 \rightarrow 9m - 4m = 3 \rightarrow \boxed{m = 3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 9x - 12y - 15 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 3, b = -4, c = 10, c' = -5$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10 - (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} \rightarrow \boxed{d = 3}$$

۴۶

$$\rightarrow \text{نقطه‌ی } A(0, 2) \text{ روی خط } (n+1)y = x + 4 \text{ قرار دارد.} \rightarrow (n+1)(2) = 0 + 4 \rightarrow 2n + 2 = 4 \rightarrow 2n = 2 \rightarrow \boxed{n = 1}$$

$$n = 1 \rightarrow 2y = x + 4 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

$$y = (2m - 7)x + 3 \rightarrow m_2 = 2m - 7$$

$$\text{دو خط عمود} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \frac{1}{2}(2m - 7) = -1 \rightarrow 2m - 7 = -2 \rightarrow 2m = 5 \rightarrow \boxed{m = \frac{5}{2}}$$

۴۷

$$\ell: 3x - y = 7 \rightarrow y = 3x - 7 \rightarrow \boxed{m_1 = 3}$$

$$d: y = 3x - 1 \rightarrow \boxed{m_2 = 3}$$

$$\Delta: x + 3y = 4 \rightarrow 3y = -x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{m_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow \ell \parallel d$$

$$m_1 \times m_p = 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow L \perp \Delta$$

$$m_p \times m_p = 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow d \perp \Delta$$

$$2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$\text{الف} \rightarrow \text{دو خط موازی} \rightarrow m = m' \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب} \rightarrow \text{دو خط عمود} \rightarrow m \cdot m' = -1 \rightarrow m = \frac{-1}{m} \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

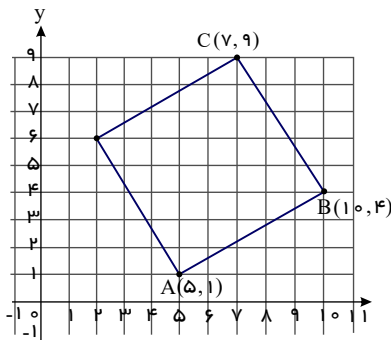
$$\text{الف} \quad m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} \rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ب} \quad AB \perp AD \rightarrow m_{AD} \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} \rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

پ) مربع نوعی از متوازی الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 + 7 = 10 + x_D \\ 1 + 9 = 4 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

ت)



$$A(1, 4), B(-1, 5)$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 4}{-1 - 1} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y + 3 = -\frac{1}{2}x + 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$y = 2x + 1 \rightarrow m' = 2 \xrightarrow{\text{عمود}} m = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 5) \rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow \text{عرض از مبدأ} = \frac{3}{2}$$

$$\text{۵۲} \quad m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{2 - 1} = 3$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m=B(2,5)]{m=3} y - 5 = 3(x - 2) \rightarrow y = 3x - 6 + 5 \rightarrow y_{AB} = 3x - 1$$

$$AC \text{ عمود بر } AB \Rightarrow \text{شیبها عکس و قرینه} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{m_{AC} = -\frac{1}{3}}{A(1,2)} \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 2 \Rightarrow y_{AC} = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10} = AB$$

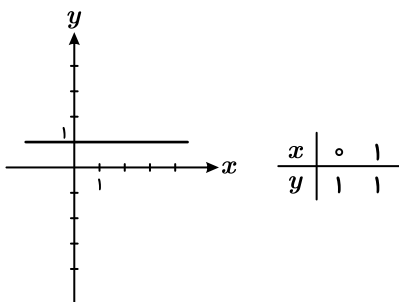
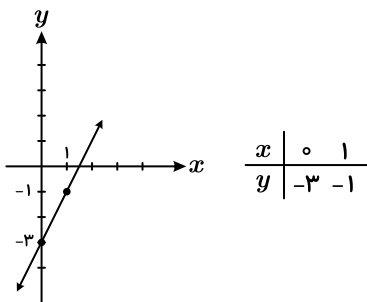
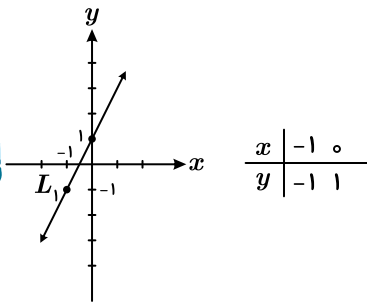
$$S = (\text{یک ضلع})^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

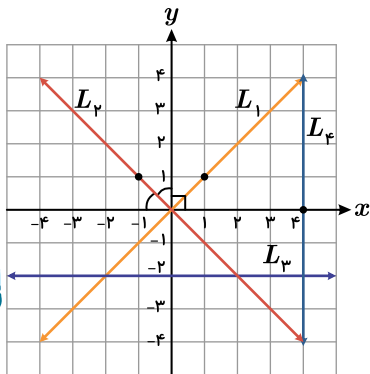
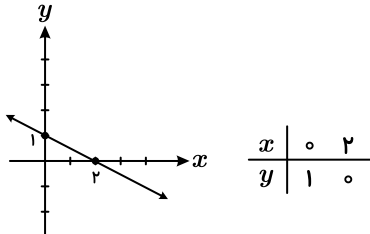
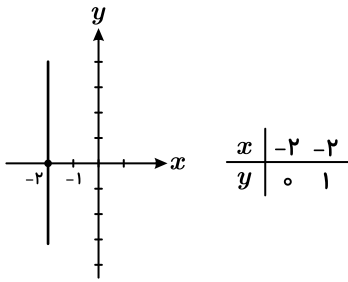
$$\text{محیط} = \text{یک ضلع} \times 4 = \sqrt{10} \times 4 = 4\sqrt{10}$$

۵۳ الف) دو (ب) دو

۵۴

الف





خطهای L_1 و L_2 از مبدأ می‌گذرند، در نتیجه معادله آنها به صورت $y = ax$ است. بنابراین با یافتن یک نقطه دیگر می‌توان معادله آنها را نوشت:

$$L_1 : y = ax \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a = 1 \Rightarrow y = x$$

$$L_2 : y = ax \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a = -1 \Rightarrow y = -x$$

خط L_3 موازی محور x ها است و از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد، پس معادله آن همان $y = -2$ است.

خط L_4 موازی محور y ها بوده و از نقطه $(4, 0)$ می‌گذرد، در نتیجه معادله آن $x = 4$ است.

۵۶

الف) مقدار میانگین سود سالانه برابر عرض نقطه وسط پاره خط داده شده روی نمودار است، پس:

$$\text{میانگین سود سالانه} = \frac{57 + 103}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

ب) برای پیدا کردن سالی که سودش با میانگین سود برابر است، کافی است طول نقطه وسط را با توجه به نمودار به دست آوریم:

$$\text{سال مورد نظر} = \frac{1385 + 1395}{2} = 1390$$

پ) برای به دست آوردن سود در سال 1405 ابتدا معادله خط را می‌نویسیم، سپس با جایگذاری عدد 1405 به جای x ، مقدار سود؛ یعنی y را پیدا می‌کنیم.

$$M = \frac{103 - 57}{1395 - 1385} = \frac{46}{10} = 4.6$$

$$y = 4.6x + h \xrightarrow{(1385, 57)} 57 = 4.6 \times 1385 + h \Rightarrow h = -6314 \Rightarrow y = 4.6x - 6314$$

$$x = 1405 \Rightarrow y = 4.6 \times 1405 - 6314 = 149$$

۵۷

$$A\left(\frac{3}{2}, 0\right), B(-1, 5)$$

$$\rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 0}{-1 - \frac{3}{2}} = \frac{5}{-\frac{5}{2}} \rightarrow \boxed{m_{AB} = -2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 0 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow \boxed{y = -2x + 3}$$

۵۸

$$A(-2, 3), B(7, -3) \rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 3}{7 - (-2)} = \frac{-6}{9} \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-2)) \rightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 3 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{محل تلاقی با محور } x \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{5}{3} \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow P\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

۵۹ طول و ارتفاع وارد بر ضلع AB = فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط AB

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{0 - 4} \rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$\rightarrow 4y = -3x + 12 \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0 \quad \text{معادله‌ی خط } AB$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} \rightarrow d = 1 \rightarrow CH = 1$$

۶۰ فاصله هر رأس مربع از ضلع مقابل برابر طول مربع است پس فاصله نقطه A از خط L برابر طول ضلع مربع است.

$$y = 2x - 1 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(3) - 1(0) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d = \sqrt{5}$$

$$S = (\sqrt{5})^2 \rightarrow S = 5 \quad \text{مساحت مربع}$$

$$AH = \frac{|-3 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$$

۶۲ گزینه «ب»

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(1) + 3(2) + 1 \cdot 0|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

$$S = a^2 = 5 \quad \text{مساحت مربع } a = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2(3) + (0) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$X - Y + 2 = 0 \text{ و } A(2, 0)$$

$$\text{فاصله نقطه از خط} = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 0 + 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{طول ضلع مربع} = d = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{مساحت} = d^2 = 8$$

۶۶ گزینه ۴

۶۷

$$r = \frac{|12 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \quad S = 9\pi$$

۶۸

نقطه مطلوب نقطه $M(x, 2x + 1)$ می باشد.

$$AM = BM \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (2x+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow (x-3) = \pm(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x-3 = x+1 \Rightarrow -3 = 1 \text{ غ ق} \\ x-3 = -x-1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1, 3)$$

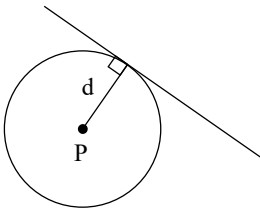
۶۹

$$3x - 4y - 20 = 0 \rightarrow a = 3, b = -4, c = -20 \quad A(3, 1) \rightarrow x_0 = 3, y_0 = 1$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(3) - 4(1) - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|9 - 4 - 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} \rightarrow \boxed{d = 3}$$

خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه مماس عمود است. بنابراین فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر دایره همان شعاع دایره است.

۷۰



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6(1,5) - 8(-2) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|9 + 16 + 5|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{30}{10} = 3 \rightarrow \boxed{R = 3}$$

۷۱

$$12x - 5y + 20 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c = 20$$

$$10y - 24x + 12 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} 12x - 5y - 6 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c' = -6$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|20 - (-6)|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} \rightarrow \boxed{d = 2}$$

۷۲

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow 4 = \frac{|4(3) + m(-2) + 2|}{\sqrt{4^2 + m^2}} \rightarrow 4 = \frac{|14 - 2m|}{\sqrt{16 + m^2}}$$

$$4\sqrt{16 + m^2} = 2|7 - m| \rightarrow 2\sqrt{16 + m^2} = |7 - m|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(16 + m^2) = (7 - m)^2 \rightarrow 64 + 4m^2 = 49 - 14m + m^2 \rightarrow 3m^2 + 14m + 15 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 14^2 - 4(3)(15) = 196 - 180 = 16 \rightarrow m = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{2(3)} \rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

۷۳

$x - y + 2 = 0$ از خط $A(3, -1)$ فاصله‌ی نقطه‌ی $a =$ طول ضلع مربع =

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(3) - 1(-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{a = 3\sqrt{2} \text{ ضلع مربع}}$$

$$\rightarrow S_{\text{مربع}} = (3\sqrt{2})^2 \rightarrow \boxed{S_{\text{مربع}} = 18}$$

$$a' = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \rightarrow \boxed{a' = 6 \text{ قطر مربع}}$$

۷۴

$$2x - y + 4 = 0, \quad A(4, 7)$$

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 4, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 7$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(4) - 1(7) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d = \sqrt{5}$$

۷۵ فاصله رأس از ضلع = طول ضلع مربع

$$y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0, \quad A(4, 1)$$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 4 + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{مساحت مربع} = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

۷۶

$$\text{الف) } L: 2x + y = 5 \rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(7) + 1(-4) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d = \sqrt{5}$$

$$\text{ب) } T: x = 5 \rightarrow x - 5 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(7) + 0(-4) - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{2}{1} \rightarrow d = 2$$

$$\text{پ) } \Delta: y = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 \times 7 + 1(-4) + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{1} \rightarrow d = 4$$

۷۷ خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، پس داریم:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-1) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} \rightarrow R = 2$$

۷۸

$$\text{الف) } \begin{cases} 5x - 12y + 8 = 0 \rightarrow 5x + 8 = 12y \rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{8}{12} \rightarrow m_1 = \frac{5}{12} \\ -10x + 24y + 10 = 0 \rightarrow 24y = 10x - 10 \rightarrow y = \frac{5}{12}x - \frac{5}{12} \rightarrow m_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$m_1 = m_2 \rightarrow$ دو خط با هم موازیند

$$\text{ب) } L_1: 5x - 12y + 8 = 0 \quad L_2: 5x - 12y - 5 = 0$$

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|18 - (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{23}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{23}{\sqrt{169}} = \frac{23}{13} \rightarrow d = 1$$

۷۹ الف افقی

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ب) شیب

۸۰ عرض از مبدأ

۸۱

$$3x + 4y + 18 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c = 18$$

$$6x + 8y - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 2 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c' = -2$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|18 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} \rightarrow \boxed{d = 4}$$

۸۲

$$y = \sqrt{3}x + 2 \rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, b = -1, c = 2$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\div (-\sqrt{3})} \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, b = -1, c' = -2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-2\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} \rightarrow \boxed{d = 1 + \sqrt{3}}$$

۸۳

$$2x + y - 3 = 0 \xrightarrow{x=3} 2(3) + y - 3 = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow A(3, -3)$$

← نقطه‌ی $A(3, -3)$ روی خط $(2m - 1)x - y = 0$ قرار دارد ←

$$(2m - 1)(3) - (-3) = 0 \rightarrow 6m - 3 + 3 = 0 \rightarrow 6m = 0 \rightarrow \boxed{m = 0}$$

۸۴ نقطه‌ی $A(2, 0)$ در هر دو تابع صدق می‌کند ←

$$y = x + 2b \xrightarrow{x=2, y=0} 0 = 2 + 2(b) \rightarrow -2 = 2b \rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$y = x^2 + ax + b \xrightarrow[b=-1]{x=2, y=0} 0 = (2)^2 + a(2) - 1 \rightarrow -4 + 1 = 2a \rightarrow -3 = 2a \rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

۸۵

$$4x - y - 3 = 0 \xrightarrow{x=3} 4(3) - y - 3 = 0 \rightarrow y = 9 \rightarrow A(3, 9)$$

← نقطه‌ی $A(3, 9)$ روی خط $(m + 1)x - 2y = 0$ قرار دارد ←

$$(m + 1)(3) - 2(9) = 0 \rightarrow 3m + 3 - 18 = 0 \rightarrow 3m = 15 \rightarrow \boxed{m = 5}$$

۸۶

الف ۲

۸۷

الف نادرست

۸۸ گزینه «ب»

۸۹

$$x + \frac{1}{x} = -2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, x \neq 0$$

۹۰

الف نادرست

۹۱

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0 \xrightarrow{\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) = k} k^2 - 11k + 10 = 0$$

$$\rightarrow (k-1)(k-10) = 0 \rightarrow \begin{cases} k=1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ k=10 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 10 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 12 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

۹۲ با تغییر متغیر $x^2 - 4 = k$ معادله را تبدیل به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ کرده و آن را حل می‌کنیم.

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0 \xrightarrow{4 - x^2 = k} k^2 - 2k - 15 = 0 \rightarrow (k+3)(k-5) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -3 \rightarrow 4 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm \sqrt{7} \\ k = 5 \rightarrow 4 - x^2 = 5 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{غ.ق.ی} \end{cases}$$

۹۳

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 \rightarrow \Delta = 16 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز منفی است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5 > 0$$

۹۴

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 \rightarrow \Delta = 36 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4 < 0$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{5}{1} = -5 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز غیر هم‌علامت است که قدر مطلق ریشه‌ی منفی بزرگتر از قدر مطلق ریشه‌ی مثبت است.

۹۵

$$x^2 - 5x = 24 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-8)(x+3) = 0$$

$$\rightarrow x-8 = 0 \rightarrow \boxed{x=8}, \quad x+3 = 0 \rightarrow \boxed{x=-3}$$

۹۶

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(1) = 49 - 12 \rightarrow \Delta = 37 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} > 0$$

۹۷

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 \rightarrow \Delta = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2 > 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مساوی (مضاعف) مثبت است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{-1} = 1 > 0$$

$$\rightarrow 4y^2 + 8y - 21 = 0 \rightarrow (2y)^2 + 4(2y) - 21 = 0$$

$$2y + 7 = 0 \rightarrow 2y = -7 \rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

$$\rightarrow (2y + 7)(2y - 3) = 0$$

$$2y - 3 = 0 \rightarrow 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow x^2 + 4x = 32 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 32 + 4$$

$$\rightarrow (x + 2)^2 = 36$$

$$x + 2 = 6 \rightarrow x = 4$$

$$x + 2 = -6 \rightarrow x = -8$$

$$\rightarrow 4x^2 - 16x = 33 \rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 33 + 16$$

$$2x - 4 = 7 \rightarrow 2x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{2}$$

$$\rightarrow (2x - 4)^2 = 7^2$$

$$2x - 4 = -7 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$a = 3, b = -2, c = 1$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 \rightarrow \Delta = -8 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

$$a = 4, b = -5, c = 1$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 \rightarrow \Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2(4)} = \frac{5 \pm 3}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$a = 9, b = -6, c = 1$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2(9)} = \frac{-6 \pm 0}{18} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{دو ریشه‌ی مساوی} \rightarrow \Delta = 0, a = 1, b = -(m+1), c = 2m-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(m+1))^2 - 4(1)(2m-1) \rightarrow \Delta = m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \rightarrow (m-5)(m-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m-5 = 0 \rightarrow m = 5 \\ m-1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

۱۰۵

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\rightarrow \Delta > 0$, $a = 1$, $b = -4$, $c = m + 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(m+3) \rightarrow \Delta = 16 - 4m - 12 > 0$$

$$\rightarrow 4 - 4m > 0 \rightarrow 4 > 4m \rightarrow \boxed{1 > m}$$

۱۰۶

$$a = k - 1$$
 , $b = 2k + 1$, $c = k - 2$

$$\text{یک ریشه صفر} \rightarrow c = 0 \rightarrow k - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$\rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x + 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = -5} \end{cases}$$

۱۰۷

$$a = m - 1$$
 , $b = m - 4$, $c = -3m$

$$\text{دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و قرینه} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \rightarrow m - 4 = 0 \rightarrow \boxed{m = 4} \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \\ x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -2} \end{cases}$$

۱۰۸

x = طول زمین , y = عرض زمین

$$\begin{cases} 2(x + y) = 18 \rightarrow x + y = 9 \rightarrow y = 9 - x \\ xy = 14 \end{cases} \rightarrow x(9 - x) = 14$$

$$\rightarrow 9x - x^2 = 14 \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 7) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 , y = 7 \\ x - 7 = 0 \rightarrow \boxed{x = 7} , \boxed{y = 2} \end{cases}$$

۱۰۹

$$\rightarrow x(2x^2 + x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{3}{2}} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}$$

۱۱۰

$$\rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \\ x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -2} \end{cases} \end{cases}$$

۱۱۱

$$\xrightarrow{\times 24} 3(3x^2 - 11) + 2(74 - 2x^2) = 24 \times 10$$

$$\rightarrow 9x^2 - 33 + 148 - 4x^2 = 240 \rightarrow 5x^2 - 125 = 0 \rightarrow 5(x^2 - 25) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 25 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \rightarrow \boxed{x = 5}, \boxed{x = -5}$$

۱۱۲

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(-5) = 49 + 100 \rightarrow \Delta = 149 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{5} = \frac{7}{5} > 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{5} = -1 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز غیر هم‌علامت است که قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگتر از قدر مطلق ریشه‌ی منفی است.

۱۱۳

الف) $x^6 - 8x^3 + 8 = 0$

$$x^6 = u \rightarrow x^3 = u^2$$

$$u^2 - 8u + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(8) = 64 - 32 = 32$$

$$\rightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} \rightarrow u = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow x^3 = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}} \\ \boxed{x = -\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}} \end{cases} \\ u = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow x^3 = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}}} \\ \boxed{x = -\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}}} \end{cases} \end{cases}$$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3 \rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0$, $x^3 = u \rightarrow x^6 = u^2$

$$4u^2 - 5u + 1 = 0 \rightarrow (4u - 1)(u - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4u - 1 = 0 \rightarrow u = \frac{1}{4} \rightarrow x^3 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$

۱۱۴

$$\rightarrow x + \frac{1}{x} = u \rightarrow u^2 - 2u = 0 \rightarrow u(u - 2) = 0 \rightarrow u = 0, u = 2$$

$$u = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

$$u = 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

۱۱۵

$$\rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow (u - 2)(u - 1) = 0 \begin{cases} u - 2 = 0 \rightarrow u = 2 \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$u = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}, \boxed{x = -\sqrt{2}}$$

$$u = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}, \boxed{x = -1}$$

۱۱۶

$$\frac{x^2}{3} - 2 = u \rightarrow u^2 - 7u + 6 = 0 \rightarrow (u - 6)(u - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 6 \\ u = 1 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm\sqrt{24} \rightarrow \boxed{\pm 2\sqrt{6}}$$

$$u = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

۱۱۷

$$4 - x^2 = k \rightarrow k^2 + 8k + 15 = 0 \rightarrow (k + 3)(k + 5) = 0$$

$$\begin{cases} k + 3 = 0 \rightarrow k = -3 \rightarrow 4 - x^2 = -3 \rightarrow 7 = x^2 \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{7}} \\ k + 5 = 0 \rightarrow k = -5 \rightarrow 4 - x^2 = -5 \rightarrow 9 = x^2 \rightarrow \boxed{x = \pm 3} \end{cases}$$

۱۱۸

$$2x^2 + 1 = k \rightarrow k^2 - 12k + 27 = 0 \rightarrow (k - 9)(k - 3) = 0 \rightarrow k = 9, k = 3$$

$$k = 9 \rightarrow 2x^2 + 1 = 9 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

$$k = 3 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۱۱۹

$$x^2 = u \rightarrow u^2 + 10u + 9 = 0 \rightarrow (u + 9)(u + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u + 9 = 0 \rightarrow u = -9 \\ u + 1 = 0 \rightarrow u = -1 \end{cases}$$

$$u = -9 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$u = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

۱۲۰

$$x^2 + x = u \rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} u - 12 = 0 \rightarrow u = 12 \\ u - 6 = 0 \rightarrow u = 6 \end{cases}$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

۱۲۱

$$u = 13 \rightarrow 3x^2 + 1 = 13 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = -2} \end{cases}$$

$$\rightarrow u^2 - 17u + 52 = 0 \rightarrow (u - 13)(u - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 13 \rightarrow 3x^2 + 1 = 13 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = -2} \end{cases} \\ u = 4 \rightarrow 3x^2 + 1 = 4 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \boxed{x = -1} \end{cases} \end{cases}$$

۱۲۲

$$\rightarrow u^2 + 3u + 2 = 0 \rightarrow (u + 2)(u + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u + 2 = 0 \rightarrow u = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow \text{جواب ندارد} \\ u + 1 = 0 \rightarrow u = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۱۲۳

$$\rightarrow 4u^2 + 1 = 5u \rightarrow 4u^2 - 5u + 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

$$u = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2(4)} \rightarrow u = \frac{5 \pm 3}{8} \rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}}} \\ u = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}}} \end{cases}$$

۱۲۴

الف) $2x^2 - 7x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$\rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81$$

$$\rightarrow u = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} u = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2, x = -2 \\ u = -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

ب) $x^2 + 3x^2 + 2 = 0$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$\rightarrow u^2 + 3u + 2 = 0 \rightarrow (u + 2)(u + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} u + 2 = 0 \rightarrow u = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ u + 1 = 0 \rightarrow u = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

۱۲۵

چون $a < 0$ ، بنابراین تابع دارای ماکزیمم است و مینیمم ندارد. الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5 \rightarrow a = -2 \rightarrow$

$$a < 0 \rightarrow y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(8)^2 - 4(-2)(-5)}{4(-2)} = -\frac{64 - 40}{-8} = -\frac{24}{-8} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 3}$$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5 \rightarrow a = 3 \rightarrow$ بنابراین تابع دارای مینیمم است و ماکزیمم ندارد.

$$a > 0 \rightarrow y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4(3)(5)}{4(3)} = -\frac{36 - 60}{12} = -\frac{-24}{12} \rightarrow \boxed{y_{\min} = 2}$$

۱۲۶

$$S = \alpha + \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3 \rightarrow S = 3$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{9 - 5}{4} \rightarrow P = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

۱۲۷

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

۱۲۸

$$x_1 = 2, \quad x_1 + x_2 = 2 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = 2x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2b}{a}$$

$$\rightarrow 2 + x_2 = -x_2 \Rightarrow x_2 = -1$$

۱۲۹

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} +$$

$$\boxed{x_2 = \frac{5}{2}} \rightarrow x_1 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = -2}$$

$$\rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow -2 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{k}{2} \rightarrow -5 = \frac{k}{2} \rightarrow \boxed{k = -10}$$

۱۳۰

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} \rightarrow \alpha\beta = 4$$

$$\alpha\beta^2 + 4 = 0 \rightarrow \alpha\beta(\beta) + 4 = 0 \rightarrow 4\beta + 4 = 0 \rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

$$\rightarrow (-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0 \rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \rightarrow 3m = -5 \rightarrow \boxed{m = -\frac{5}{3}}$$

۱۳۱

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \rightarrow \beta = 2\alpha \rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \alpha + 2\alpha = -\frac{-9}{2} \rightarrow 3\alpha = \frac{9}{2} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{3}{2}\right) + m + 3 = 0 \rightarrow 2\left(\frac{9}{2}\right) - 9\left(\frac{3}{2}\right) + m + 3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{9}{2} - \frac{27}{2} + 3 = -m \rightarrow -9 + 3 = -m \rightarrow \boxed{m = 6}$$

۱۳۲

$$\beta = \alpha + 3 \rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \rightarrow \alpha + \alpha + 3 = -\frac{-8}{4} \rightarrow 2\alpha + 3 = 2 \rightarrow 2\alpha = -1$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}, \beta = -\frac{1}{2} + 3 \rightarrow \boxed{\beta = \frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{-m}{4} \rightarrow \frac{-5}{4} = \frac{-m}{4} \rightarrow \boxed{m = 5}$$

۱۳۳

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-12}{4} \rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 3}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = k \xrightarrow{k>0} k^2 = \frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow k^2 = \frac{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = \frac{3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow \boxed{k = 4}$$

$k = -4$ غ

۱۳۴

$$\begin{cases} \beta = 3\alpha + 3 \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta - 3\alpha = 3 \\ \alpha + \beta = \frac{12}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = -3 \\ \alpha + \beta = \frac{12}{3} \end{cases} +$$

$$4\alpha = \frac{8}{3} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}, \beta = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \rightarrow \boxed{\beta = 5}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{2}{3} \times 5 = \frac{m}{3} \rightarrow \boxed{m = 10}$$

۱۳۵

$$\begin{cases} \beta = \alpha - 2 \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} +$$

$$2\alpha = 6 \rightarrow \boxed{\alpha = 3}, \quad 3 - \beta = 2 \rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow 3 \times 1 = \frac{m}{2} \rightarrow \boxed{m = 6}$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2PS}{P} = \frac{5^2 - 2(2)(5)}{2} = \frac{125 - 20}{2} = \frac{105}{2} \rightarrow \boxed{\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 47.5}$$

$$\beta = \alpha^2 \rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \alpha(\alpha^2) = \frac{1}{1} \rightarrow \alpha^3 = 1 \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\rightarrow 2^2 + k(2) + 1 = 0 \rightarrow 4 + 2k + 1 = 0 \rightarrow 2k = -12 \rightarrow \boxed{k = -6}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \sqrt{x_2} = 2 \\ x_1 - \sqrt{x_2} = 2\sqrt{2} \end{cases} +$$

$$2x_1 = 2 + 2\sqrt{2} \rightarrow \boxed{x_1 = 1 + \sqrt{2}}, \quad 1 + \sqrt{2} + x_2 = 2 \rightarrow \boxed{x_2 = 1 - \sqrt{2}}$$

$$\rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = \frac{m-1}{1} \rightarrow 1 - 2 = m - 1$$

$$\rightarrow -2 = m - 1 \rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$\beta = 2\alpha, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \alpha + 2\alpha = -\frac{-3}{m} \rightarrow 3\alpha = \frac{3}{m} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{m}}, \quad \boxed{\beta = \frac{2}{m}}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{1}{m} \cdot \frac{2}{m} = \frac{1}{m} \rightarrow 2m = m^2 \rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\rightarrow m(m - 2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} m = 0 \text{ } \checkmark \\ m - 2 = 0 \rightarrow \boxed{m = 2} \end{matrix}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 4$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \rightarrow P = \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = (S^2 - 2P) + \frac{S}{P} = 4^2 - 2(1) + \frac{4}{1} = 16$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 6, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = 4$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P(S^2 - 2P) = 4(6^2 - 2(4)) = 4 \times 28 = 112$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = -5$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{3+2}{-5+3+1} = \frac{5}{-1} = -5$$

۱۳۶

۱۳۷

۱۳۸

۱۳۹

۱۴۰

۱۴۱

۱۴۲

۱۴۳

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{6} = -\frac{k+1}{6} \rightarrow 1 = -k-1 \rightarrow \boxed{k = -2}$$

$$\rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(6)} \rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -\frac{1}{2}} \\ \boxed{x = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

۱۴۴

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow 5 = \frac{1-k}{2} \rightarrow 1-k = 10 \rightarrow \boxed{k = -9}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4(2)(10) = 81 - 80 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{9 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = \frac{5}{2}} \end{cases}$$

۱۴۵

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = 1 \rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \rightarrow 2m+6 = 2 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-6}{2} \rightarrow \boxed{S = 3}$$

۱۴۶

$$\beta \text{ و } \alpha \text{ هندسی بین } \sqrt{2} \rightarrow \alpha\beta = (\sqrt{2})^2$$

$$\rightarrow \frac{m^2 - 3}{m} = 2 \rightarrow m^2 - 3 = 2m \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m-3 = 0 \rightarrow m = 3 \rightarrow 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Delta = (-5)^2 - 4(3)(6) = 25 - 72 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد} \\ m+1 = 0 \rightarrow \boxed{m = -1} \rightarrow -x^2 - 5x - 2 = 0 \\ \Delta = (-5)^2 - 4(-1)(-2) = 25 - 8 > 0 \text{ ریشه حقیقی دارد} \end{cases}$$

۱۴۷

$$\beta \text{ و } \alpha \text{ حسابی بین } \frac{1}{8} \rightarrow \alpha + \beta = 2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{-3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \rightarrow 12 = m^2 - 4 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$$

$$m = 4 \rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(12)(4) = 9 - 192 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$

$$\boxed{m = -4} \rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(12)(-4) = 9 + 192 > 0 \text{ ریشه حقیقی دارد}$$

۱۴۸

$$\beta = \alpha + 2 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha + \beta = \alpha + \alpha + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha + \beta = 2\alpha + 2 \end{cases} \rightarrow 2\alpha + 2 = 5 \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}}, \boxed{\beta = \frac{7}{2}}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{m}{3} \rightarrow \frac{21}{4} = \frac{m}{3} \rightarrow \boxed{m = \frac{63}{4}}$$

۱۴۹

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + 5 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha + \beta = \alpha + \frac{\alpha}{2} + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha + \beta = \frac{3\alpha}{2} + 5 \end{cases} \rightarrow 8 = \frac{3\alpha}{2} + 5$$

$$\rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 3 \rightarrow \boxed{\alpha = 2} \rightarrow (2)^2 - 8(2) + m = 0 \rightarrow 4 - 16 + m = 0 \rightarrow \boxed{m = 12}$$

۱۵۰

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \rightarrow \text{ریشه‌ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \rightarrow m^2 - 2 = m$$

$$\rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

$$m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

$$m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \boxed{m = -1} \text{ ریشه‌ی حقیقی دارد}$$

۱۵۱

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

$$P = \alpha\beta = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 \rightarrow \boxed{P = 1}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$$

۱۵۲

$$\alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$P = \alpha\beta = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4 - 3}{4} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0} \quad \text{یا} \quad \boxed{4x^2 - 8x + 1 = 0}$$

۱۵۳

$$\alpha = 2 - \sqrt{4 - a}, \beta = 2 + \sqrt{4 - a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{4 - a} + 2 + \sqrt{4 - a} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{4 - a})(2 + \sqrt{4 - a}) = 4 - (4 - a) \rightarrow \boxed{P = a}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 4x + a = 0}$$

۱۵۴ الف -

$$\text{ریشه‌ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow c = a \rightarrow -5 = 2(m - 2)$$

$$\rightarrow -5 = 2m - 4 \rightarrow -1 = 2m \rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

ب -

$$S = 2 \rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{-3}{2(m - 2)} = 2$$

$$\rightarrow -3 = 4(m - 2) \rightarrow -3 = 4m - 8 \rightarrow 5 = 4m \rightarrow \boxed{m = \frac{5}{4}}$$

۱۵۵

$$\alpha, \beta = \text{طول و عرض اتاق} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ 2(\alpha + \beta) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 24 \\ S = 10 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

← طول اتاق ۶ متر و عرض اتاق ۴ متر

۱۵۶

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{-4}{2} \rightarrow S = 2 \\ P &= \alpha\beta = \frac{-6}{2} \rightarrow P = -3 \end{aligned}$$

$$\text{معادله ی جدید } X = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{2^2 - 2(-3)}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{S' = \frac{10}{9}}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{P^2} = \frac{1}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow x^2 - S'x + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \rightarrow \boxed{9x^2 - 10x + 1 = 0}$$

۱۵۷

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \frac{1}{\alpha} \\ \beta &\rightarrow \frac{1}{\beta} \end{aligned} \rightarrow X = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{1}{X}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{X}\right) - 5 = 0 \rightarrow \frac{2}{X^2} - \frac{5}{X} - 5 = 0 \rightarrow 2 - 5X - 5X^2 = 0 \rightarrow \boxed{5x^2 + 5x - 2 = 0}$$

۱۵۸

$$\begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{-2}{1} \rightarrow \boxed{S = 2} \\ x^2 - 2x - 1 = 0 &\rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \\ P &= \alpha\beta = \frac{-1}{1} \rightarrow \boxed{P = -1} \end{aligned}$$

$$S' = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow S' = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{S' = 2}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow P' = \frac{1}{P+S+1} = \frac{1}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow X^2 - S'X + P' = 0 \rightarrow X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \boxed{2X^2 - 4X + 1 = 0}$$

۱۵۹

$$x^2 + x - 1 = 0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{1}{1} \rightarrow S = -1 \\ P &= \alpha\beta = \frac{-1}{1} \rightarrow P = -1 \end{aligned}$$

$$X = x^2 \rightarrow S' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS = (-1)^2 - 2(-1)(-1) = -1 - 2 \rightarrow \boxed{S' = -3}$$

$$P' = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = (-1)^2 \rightarrow \boxed{P' = 1}$$

$$\rightarrow X^2 - S'X + P' = 0 \rightarrow X^2 - (-3)X - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x^2 + 3x - 1 = 0}$$

۱۶۰

$$X = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{X} \rightarrow 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{x}\right) = 7 \rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{x} - 7 = 0$$

$$\rightarrow 3 - 12x - 7x^2 = 0 \rightarrow \boxed{7x^2 + 12x - 3 = 0}$$

۱۶۱

$$S = \alpha + \beta = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2 \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 \rightarrow \boxed{P = -1}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 2x - 1 = 0}$$

۱۶۲

$$S = -1,5, P = -7 \} \rightarrow x^2 - (-1,5)x - 7 = 0 \rightarrow x^2 + 1,5x - 7 = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (1,5)^2 - 4(1)(-7) = 2,25 + 28 = 30,25$$

$$\rightarrow x = \frac{-1,5 \pm \sqrt{30,25}}{2} = \frac{-1,5 \pm 5,5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -3,5 \\ x = 2 \end{cases}$$

راه حل اول: ۱۶۳

$$S = \frac{2 - \sqrt{3}}{5} + \frac{2 + \sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5} \quad P = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

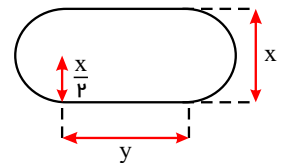
توجه: هر مضرب غیر صفر از معادله بالا صحیح است.

راه حل دوم:

$$\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right) = x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

توجه: هر مضرب غیر صفر از معادله بالا صحیح است.

۱۶۴



$P =$ محیط استادیوم

$$P = 2y + \pi x \rightarrow 2y + \pi x = 1500 \rightarrow 2y = -\pi x + 1500$$

$$\rightarrow y = \frac{-\pi x}{2} + 750$$

$$S_1 = xy = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 750x, \quad a < 0$$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow x_{\max} = \frac{750}{\pi} \approx 238,85$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{750}{\pi}\right) + 750 = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

$$S_2 = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) + \pi\frac{x^2}{4}$$

$$\rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{2} + 750x + \frac{\pi x^2}{4} \rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{4} + 750x, \quad a < 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \rightarrow x_{\max} = \frac{1500}{\pi} \approx 477,70$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1500}{\pi}\right) + 750 \rightarrow y_{\max} = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

۱۶۵

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

$$\text{الف) } t_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = \frac{100}{10} \rightarrow t_{\max} = 10 \text{ ثانیه}$$

$$\text{ب) ارتفاع اوج } h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 \rightarrow h_{\max} = 500 \text{ متر}$$

$$\text{پ) } h(t) = 0 \rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(20 - t) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{زمان شروع پرتاب} \\ t = 20 \rightarrow \text{زمان بازگشت به زمین} \end{cases} \quad \boxed{t = 20} \text{ ثانیه}$$

۱۶۶ ابتدا مجموع طول سه ضلع را برابر ۱۰۰ قرار می‌دهیم، داریم:

$$2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

تابع مساحت بر حسب x تابعی درجه دوم است و داریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = x \times y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$f(x) = -2x^2 + 100x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} = 25 \Rightarrow y = 100 - 2 \times 25 = 50$$

بیشترین مساحت به ازای $x = 25$ و $y = 50$ به دست می‌آید و داریم:

$$S_{\max} = 25 \times 50 = 1250 m^2$$

۱۶۷

الف درست

ب درست

۱۶۸

$$8y = -x^2 + 4x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{8} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{8})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$y = -\frac{1}{8}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 1}$$

۱۶۹

$$a = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{20}{1} \rightarrow \boxed{x = 20}$$

$$f(20) = -\frac{(20)^2}{2} + 20(20) = -200 + 400 = 200 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 200}$$

۱۷۰

$$a = 3 > 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی min دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(3)} = \frac{12}{6} \rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 1 = 12 - 24 + 1 = -11 \rightarrow y_{\min} = -11$$

۱۷۱

$$a = 1 > 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی min دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$h(2) = 2^2 - 4(2) + 9 = 4 - 8 + 9 = 5 \rightarrow \boxed{y_{\min} = 5}$$

۱۷۲

$$g(x) = -(x+1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2$$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ تابع نقطه‌ی max دارد

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = \frac{2}{-2} \rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$g(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 + 2 + 2 = 3 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 3}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{نیمساز ربع اول} \\ x, y > 0}]{\text{جایگذاری}} x = y \rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \Delta = 2b$$

$$\rightarrow b^2 - 4ac = 2b \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a^2 - 4(1)(2) = 2a \rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a - 4 = 0 \rightarrow a = 4 \rightarrow y = x^2 + 4x + 2 \rightarrow x_{\min} = -\frac{4}{2(1)} < 0 \text{ غ}$$

$$\rightarrow (a - 4)(a + 2) = 0 \begin{cases} a + 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = -2} \rightarrow y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow x_{\min} = -\frac{-2}{2(1)} = 1 > 0 \checkmark \end{cases}$$

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3 = \frac{a^2 - 4(1)(4)}{-4(1)} \rightarrow -12 = a^2 - 16 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x, a = -\frac{1}{9} < 0 \rightarrow$ تابع نقطه‌ی max دارد

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{6}{\frac{2}{9}} \rightarrow \boxed{x = 27}$$

$$y = -\frac{1}{9}(27)^2 + 6(27) = -3 \times 27 + 6 \times 27 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

$$\text{دوم } y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(6^2 - 4(-\frac{1}{9})(0))}{4(-\frac{1}{9})} = \frac{-36}{-\frac{4}{9}} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

$\min \rightarrow a > 0$

$$y_{\min} = 1, y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{(-2\sqrt{2})^2 - 4a(a)}{4a} = 1$$

$$\rightarrow \frac{8 - 4a^2}{-4a} = 1 \rightarrow 8 - 4a^2 = -4a \rightarrow 4a^2 - 4a - 8 = 0$$

$$\rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \begin{cases} a - 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ تابع نقطه‌ی max دارد

۱۷۳

۱۷۴

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۷

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\lambda}{2(-1)} = \lambda \rightarrow y_{\max} = \lambda + \lambda(\lambda) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \rightarrow y_{\max} = \lambda^2 = 4$$

۱۷۸

$a = -1 > 0 \rightarrow$ تابع نقطه‌ی min دارد

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(9)} = -\frac{1}{3} \rightarrow y_{\min} = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 1 - 2 + 3 \rightarrow y_{\min} = 2$$

۱۷۹

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

$$g(x) = -(x^2 + 2x + 1) + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2 \rightarrow a = -1$$

$$a < 0 \rightarrow y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(-1)(2)}{4(-1)} = -\frac{12}{-4} \rightarrow y_{\max} = 3$$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9 \rightarrow a = 1$

$$a > 0 \rightarrow y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(9)}{4(1)} = -\frac{-20}{4} \rightarrow y_{\min} = 5$$

۱۸۰

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

مساحت مستطیل $f(x) = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 100x \rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} \rightarrow x_{\max} = 25, y_{\max} = 50$$

$$\rightarrow \text{بیشترین مساحت } S_{\max} = 1250$$

۱۸۱

الف

$$\text{منحنی رو به بالا} \rightarrow a > 0$$

$$\text{جمع دو ریشه} = -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

ب

$$y = c = 0 \text{ عرض محل برخورد نمودار با محور } y$$

۱۸۲

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ P(2) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ -b = 4a \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4a - b = 0 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} +$$

$$\boxed{b = -2}, \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

۱۸۳

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} +$$

$$12a = -2 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}}, \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$\begin{cases} P(0) = 3 \\ \frac{-b}{2a} = -4 \\ P(-4) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 8a \\ 16a - 4b + c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - 8a = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{8b} - 32a = 0 \\ 16a - \cancel{8b} = -5 \end{cases} +$$

$$-16a = -5 \rightarrow \boxed{a = \frac{5}{16}}, \boxed{b = \frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 3}$$

$$\begin{cases} A(1, -1) \\ B(0, 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 1 + c = -1 \\ 0 + 0 + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + c = -2 \rightarrow a + 2 = -2 \rightarrow \boxed{a = -4} \\ \boxed{c = 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2, -1) \\ (3, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -1 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12a - \cancel{6b} = 3 \\ 18a + \cancel{6b} = 0 \end{cases} +$$

$$9a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{2}}$$

$$\begin{cases} (0, -3) \\ (3, 0) \\ (-1, 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ a - b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + \cancel{b} = 1 \\ a - \cancel{b} = 7 \end{cases} +$$

$$4a = 8 \rightarrow \boxed{a = 2}, \boxed{b = -5}$$

$$\begin{cases} (0, 3) \\ (1, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 1 + b + c = 0 \rightarrow 1 + b + 3 = 0 \rightarrow \boxed{b = -4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2, 0) \\ (0, 2) \\ (3, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ c = 2 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12a - \cancel{6b} = 6 \\ 18a + \cancel{6b} = -2 \end{cases} +$$

$$\boxed{y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 2} \leftarrow \boxed{b = \frac{-7}{3}} \leftarrow \boxed{a = \frac{2}{3}} \leftarrow 6a = 4$$

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = -\frac{b}{2(3)} \\ -4 = -\frac{b^2 - 4(3)c}{4(3)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 6} \\ 48 = b^2 - 12c \rightarrow 48 = 36 - 12c \rightarrow \boxed{c = -1} \end{cases}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

۱۸۴

۱۸۵

۱۸۶

۱۸۷

۱۸۸

۱۸۹

۱۹۰

۱۹۱

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a - b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -6 \rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\rightarrow y = f(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

۱۹۲

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow f(x) = x^2 + x - 2$$

۱۹۳

الف با توجه به $f(x) = ax^2 + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

$$\begin{aligned} f(0) = 4 &\rightarrow 0 + 0 + c = 4 \rightarrow c = 4 \quad (1) \\ f(1) = 0 &\rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(1)} a + b = -4 \quad (2) \\ f(2) = 0 &\rightarrow 4a + 2b + c = 0 \xrightarrow{(1)} 4a + 2b = -4 \rightarrow 2a + b = -2 \quad (3) \end{aligned}$$

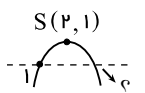
$$\begin{aligned} (3) - (2) : a = 2 &\xrightarrow{(2)} b = -6 \\ \Rightarrow f(x) &= 2x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

ب با توجه به $f(x) = ax^2 + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

$$\begin{aligned} f(-1) = -2 &\rightarrow a - b + c = -2 \quad (1) \\ f(-3) = 0 &\rightarrow 9a - 3b + c = 0 \quad (2) \\ f(1) = 0 &\rightarrow a + b + c = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) - (3) : -2b &= -2 \rightarrow b = 1 \quad (*) \\ (2) - (3) : 8a - 4b &= 0 \xrightarrow{*} a = \frac{1}{2} \\ (1) : \frac{1}{2} - 1 + c &= -2 \rightarrow c = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

پ رأس سهمی دقیقاً بین دو ریشه تابع است



$$2 = \frac{1+?}{2} \rightarrow ? = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (2)$$

$$f(3) = 0 \rightarrow 9a + 3b + c = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (1) - (2) : 3a + b &= 1 \quad (*) \\ (3) - (1) : 5a + b &= -1 \quad (**) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(**) - (*)} 2a = -2 \rightarrow a = -1 \xrightarrow{*} b = 4 \xrightarrow{(2)} c = -3$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f(0) = 2 \rightarrow 0 + 0 + c = 2 \rightarrow c = 2 \quad (1)$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(1)} a + b = -2 \quad (3)$$

$$(2) - (3) : a = 2 \xrightarrow{(2)} b = -4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \\ y_{\min} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ \frac{-b^2 + 4a(0)}{4a} = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b^2 = -16a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 = 16a \rightarrow (-2a)^2 = 16a \rightarrow 4a^2 = 16a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a^2 - 16a = 0 \rightarrow 4a(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases} \quad \text{غ}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases} \rightarrow \boxed{f(x) = 4x^2 - 8x}$$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 4 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -b = 6a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 0 \\ b = -6a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a + 2(-6a) + 4 = 0 \rightarrow 4a - 12a + 4 = 0 \rightarrow -8a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$, \quad \boxed{b = -3} \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4}$$

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x - 2)^2 \\ 4 = a(0 - 2)^2 \rightarrow 4 = 4a \end{cases} \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\rightarrow f(x) = 1(x - 2)^2 \rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 4x + 4}$$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-1) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 3 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 3}$$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

۱۹۴

الف

ب

پ

ت

ث

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 1 \\ -b = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 4a + c = 0 \\ 4a + 2(-4a) + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - c = -1 \end{cases} +$$

$$\boxed{a = -1} \rightarrow \boxed{c = -3} \rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 4x - 3}$$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = -2 \\ a(1)^2 + b(1) + c = -1 \\ -b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c = -2} \\ a + b - 2 = -1 \\ b = -2a \end{cases}$$

$$\rightarrow a + (-2a) = 1 \rightarrow -a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1}, \boxed{b = 2}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 2x - 2}$$

ج

۱۹۵
الف منفی
۱۹۶

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c < 0$$

$$y \text{ رأس سهمی روی محور } y \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

دو ریشه‌ی مساوی $\Delta = 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow c < 0 \quad x' = x'' < 0$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \rightarrow b < 0$$

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c > 0$$

$$y \text{ رأس سهمی روی محور } y \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Delta < 0 \rightarrow$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$$

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ac > 0 \rightarrow c < 0$$

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c < 0$$

۱۹۷

۱۹۸

۱۹۹

۲۰۰

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow b < 0$$

۲۰۱

$a > 0$ $\Delta > 0 \rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow c > 0 \quad x', x'' < 0$$

$$\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow b > 0$$

۲۰۲

$a < 0$ $\Delta = 0 \rightarrow$ دو ریشه‌ی مساوی

$$\frac{c}{a} = 0 \rightarrow c = 0 \quad x' = x'' = 0$$

$$-\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0$$

۲۰۳

$a < 0$ $\Delta < 0 \rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

$$-\frac{b}{2a} < 0 \rightarrow b < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ac > 0 \rightarrow c < 0$$

۲۰۴

زمان ویرایش رضا = x زمان ویرایش دو نفر = $1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

سرعت ویرایش دو نفر = سرعت ویرایش رضا + سرعت ویرایش علی

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow \boxed{x = 4} \text{ ساعت}$$

۲۰۵

الف

$$\rightarrow \text{کم مخرج‌ها} = x(x-2) \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-2) \times \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{5}{1} \right] \rightarrow (x-2) + x = 5x(x-2)$$

$$\rightarrow 2x - 2 = 5x^2 - 10x \rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(5)(2) = 144 - 40 = 104$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{2(5)} = \frac{12 \pm 2\sqrt{26}}{10} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{26}}{5} \\ x = \frac{6 - \sqrt{26}}{5} \end{cases}$$

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \rightarrow \text{کم مخرج‌ها} = 6r \rightarrow r \neq 0$$

$$6r \times \left[\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \right] \rightarrow 60 - 45r = 40 - 30r \rightarrow 60 - 40 = 45r - 30r$$

ج

$$\rightarrow 20 = 15r \rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \rightarrow \text{ک م م مخرج ها} = (x-3)(x+4) \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-3)(x+4) \times \left[\frac{2x}{(x-3)} + \frac{(x+1)}{(x+4)} = \frac{(x-1)}{(x-3)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x+4) + (x-3)(x+1) = (x+4)(x-1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4$$

$$\rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{t+4} = 3 \rightarrow (\sqrt{t+4})^2 = (3)^2$$

$$\rightarrow t+4 = 9 \rightarrow t = 5$$

$$k = \sqrt{6k-8} \rightarrow (k)^2 = (\sqrt{6k-8})^2$$

$$\rightarrow k^2 = 6k-8 \rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \rightarrow (k-2)(k-4) = 0 \begin{cases} k-2=0 \rightarrow k=2 \\ k-4=0 \rightarrow k=4 \end{cases}$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

$$\rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x-9=0 \rightarrow x=9 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول } 9$$

$$\rightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = (\sqrt{2x-5})^2$$

$$\rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x-5 \rightarrow x+2 - 2\sqrt{x+1} = 2x-5$$

$$\rightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1} \rightarrow (-x+7)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 = 4(x+1) \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x-15) = 0 \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x-15=0 \rightarrow x=15 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول } 15$$

$$\rightarrow (\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = 2^2 \rightarrow m + 2\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{m}}) + \frac{1}{m} = 4$$

$$\rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4 \rightarrow m - 2 + \frac{1}{m} = 0 \rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{m} = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m - 1)^2 = 0 \rightarrow m - 1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1}$$

۲۰۶ $x = 1$ جواب معادله است و در نتیجه در معادله صدق می‌کند. با قرار دادن عدد یک به جای x و حل معادله، مقدار k را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{\lambda}{k} = \frac{3x}{x+2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{1-2} + \frac{\lambda}{k} = \frac{3(1)}{1+2}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{\lambda}{k} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{k} = 2 \Rightarrow 2k = \lambda \Rightarrow k = 4$$

۲۰۷ $t = -3$ جواب معادله است و در آن صدق می‌کند:

$$\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68} \xrightarrow{t=-3} \frac{7}{8} = \frac{27+k}{100-68}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow 27+k = 28 \Rightarrow k = 1$$

۲۰۸ اگر x مسافت جابه‌جایی، v سرعت و t مدت زمان جابه‌جایی باشد، آنگاه $t = \frac{x}{v}$ می‌باشد. طبق فرض $x = 75$ می‌باشد. اگر v سرعت قطار در مسیر رفت

و t_1 مدت زمان مسیر رفت باشد، آنگاه: $t_1 = \frac{75}{v}$ سرعت قطار در مسیر برگشت ۱۰ کیلومتر بیشتر از سرعت قطار در مسیر رفت است، پس سرعت آن $v + 10$ می‌باشد. بنابراین اگر t_2 مدت زمان مسیر برگشت باشد، آنگاه:

$$t_2 = \frac{75}{v+10}$$

طبق فرض زمان برگشت $\frac{1}{4}$ ساعت (۱۵ دقیقه) کمتر از مسیر رفت است، بنابراین:

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{75}{v} - \frac{75}{v+10} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4v(v+10)} 4 \cancel{v} (v+10) \times \frac{75}{\cancel{v}} - 4v \cancel{(v+10)} \times \frac{75}{v+10}$$

$$= \cancel{4} v(v+10) \times \frac{1}{\cancel{4}} \Rightarrow \cancel{300} v - \cancel{300} v + 3000 = v^2 + 10v$$

$$\Rightarrow v^2 + 10v - 3000 = 0 \Rightarrow (v - 50)(v + 60) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v - 50 = 0 \\ v + 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 50 \\ v = -60 \end{cases}$$

۲۰۹ فرض کنیم یکی از آنها در x ساعت و دیگری در $4x$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی کنند، پس هر یک به تنهایی در یک ساعت به ترتیب، $\frac{1}{x}$

و $\frac{1}{4x}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. از طرفی دو نفر با هم در ۴ ساعت کل ساختمان را رنگ می‌کنند، پس دو نفر با هم در یک ساعت، $\frac{1}{4}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4x} 4 + 1 = x \Rightarrow x = 5$$

پس یکی از آنها در ۵ ساعت و دیگری در $4 \times 5 = 20$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کنند.

۲۱۰ فرض کنیم علی در x ساعت مجله را به تنهایی ویرایش کند. پس وی در هر ساعت $\frac{1}{x}$ مجله را ویرایش می‌کند. همچنین رضا در یک ساعت $\frac{1}{6}$ مجله را

ویرایش می‌کند. طبق فرض دو نفر در یک ساعت $\frac{1}{4}$ مجله را ویرایش می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3-2}{12} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 12$$

بنابراین علی به تنهایی در ۱۲ ساعت مجله را ویرایش می‌کند.

۲۱۱ فرض کنیم x عدد مورد نظر باشد در این صورت $\sqrt{x}$ جذر آن است. طبق فرض داریم:

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x = (20 - x)^2$$

$$\Rightarrow x = 400 - 40x + x^2 \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\Delta = (-41)^2 - 4(400) = 1681 - 1600 = 81$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{41 + 9}{2} = 25 \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{41 - 9}{2} = 16 \end{cases}$$

$x = 16$ در معادله $x + \sqrt{x} = 20$ صدق می‌کند، ولی $x = 25$ در معادله $x + \sqrt{x} = 20$ صدق نمی‌کند. پس عدد مورد نظر ۱۶ می‌باشد.

۲۱۲ فرض کنیم سرعت اتومبیل اول v و مدت زمان حرکت آن t_1 باشد، در این صورت:

$$t_1 = \frac{180}{v}$$

سرعت اتومبیل دوم $v + 4$ می‌باشد، اگر t_2 مدت زمان حرکت آن باشد، آنگاه:

$$t_2 = \frac{180}{v+4}, t_2 = t_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180}{v+4} = \frac{180}{v} - \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2v(v+4)} 360v = 360(v+4) - v(v+4)$$

$$\Rightarrow 360v = 360v + 1440 - v^2 - 4v$$

$$\Rightarrow v^2 + 4v - 1440 \times 4 = 0 \Rightarrow v = 36 \Rightarrow v + 4 = 40$$

۲۱۳

$$\sqrt{2-x} = 1 - 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2-x = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ x = \frac{-1}{4} \rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۲۱۴

$$\sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{3x+1} \Rightarrow x+3 = 16 + 3x+1 - 8\sqrt{3x+1}$$

$$2x+14 = 8\sqrt{3x+1} \Rightarrow x+7 = 4\sqrt{3x+1}$$

$$x^2 + 14x + 49 = 16(3x+1) \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad x = 33 \text{ غ ق ق}$$

۲۱۵

$$\rightarrow \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \rightarrow x(x-1)(x+1) \rightarrow x \neq 0$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) \times \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$$

غیر قابل قبول $x = 1$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(5)} \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0$$

$$\text{کم مخرج ها} = x^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow x^2 \times \left[\frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0 \right] \rightarrow 3 - 12x^2 = 0$$

$$1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 3(1 - 4x^2) = 0 \rightarrow 3(1 - 2x)(1 + 2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 1 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \rightarrow \text{کم مخرج ها} = k(k+2) \rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow k(k+2) \times \left[\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \right]$$

$$\rightarrow 2(k+2) - 3k^2 = k \rightarrow 2k + 4 - 3k^2 = k \rightarrow 3k^2 - k - 4 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$$

$$\rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{1 \pm 7}{6} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \rightarrow \text{کم مخرج ها} = x(x-3)(x+3) \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-3)(x+3) \times \left[\frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \right]$$

$$\rightarrow 3(x-3)(x+3) - 2x(x+3) = -12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x = -12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ غیر قابل قبول} \\ x+9 = 0 \rightarrow x = -9 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

$$\text{الف)} \sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = x + \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \rightarrow x = \frac{9x^2}{4}$$

۲۱۶

الف

ب

پ

۲۱۷

$$\rightarrow 4x = 9x^2 \rightarrow 9x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(9x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{9} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\text{ب) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x^2}{4} = x$$

$$\rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 4 = 10 - \frac{h}{5}$$

$$\rightarrow \frac{h}{5} = 10 - 4 \rightarrow \boxed{h = 30m}$$

۲۱۸

$$(2x - 1)^2 = (-\sqrt{2 - x})^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ غیر قابل قبول}, x_2 = \frac{-1}{4}$$

۲۱۹

$$2 - x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق} \\ x = 1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۲۲۰

گزینه «د» ۲۲۱

۲۲۲

الف درست

۲۲۳ دامنه عبارت رادیکالی برابر با: $x \geq \frac{1}{4}$

$$2x = \sqrt{4x - 1} \rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۲۲۴ ابتدا تفاضل دو عبارت رادیکالی را می‌نویسیم و حاصل را به ازای $x = 3$ به دست می‌آوریم، سپس آن را تبدیل به یک معادله می‌کنیم:

$$\sqrt{x + 6} - \sqrt{3x - 5} \stackrel{x=3}{=} \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

$$\text{معادله: } \sqrt{x + 6} - \sqrt{3x - 5} = 1$$

۲۲۵ باید h را طوری به دست آوریم که $t = 3$ شود:

$$t = \sqrt{16 - \frac{h}{5}}, t = 3 \Rightarrow \sqrt{16 - \frac{h}{5}} = 3 \Rightarrow 16 - \frac{h}{5} = 9 \Rightarrow \frac{h}{5} = 7 \Rightarrow h = 35$$

۲۲۶ فاصله دو نقطه $A(a, 5)$ و $B(4, a - 3)$ را به دست می‌آوریم و آن را مساوی $2\sqrt{10}$ قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{(4 - a)^2 + (a - 3 - 5)^2} = \sqrt{(4 - a)^2 + (a - 8)^2} = 2\sqrt{10}$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$\rightarrow (4 - a)^2 + (a - 8)^2 = 40$$

$$\Rightarrow 16 - 8a + a^2 + a^2 - 16a + 64 = 40 \Rightarrow 2a^2 - 24a + 40 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ a - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 10 \end{cases}$$

۲۲۷

الف حاصل رادیکال‌های با فرجه زوج، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، حاصل جمع عدد دو با عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر با صفر نمی‌شود.

ب حاصل جمع عدد یک با دو عبارت بزرگتر یا مساوی صفر، برابر با صفر نمی‌شود.

پ مجموع دو عبارت بزرگتر یا مساوی صفر فقط وقتی صفر است که هر دو صفر باشند؛ یعنی:

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ولی x هم‌زمان نمی‌تواند ۱ و ۲ باشد. پس مجموع $\sqrt{x-2}$ و $\sqrt{1-x}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود؛ یعنی معادله جواب ندارد.

۲۲۸

$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

۲۲۹

$$\rightarrow (\sqrt{(x-2)^2 + 9})^2 = (5)^2 \rightarrow (x-2)^2 + 9 = 25 \rightarrow (x-2)^2 = 25 - 9$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = 16 \begin{cases} x-2 = 4 \rightarrow x = 6 \\ x-2 = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۲۳۰

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x-2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x-2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

غیرقابل قبول

۲۳۱

$$x - \sqrt{x} = 20 \rightarrow x - 20 = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow (x-20)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 40x + 400 = x \rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\rightarrow (x-25)(x-16) = 0 \begin{cases} x-25 = 0 \rightarrow x = 25 \\ x-16 = 0 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

غیرقابل قبول

۲۳۲

$$\rightarrow (2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x+9})^2 \rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x = x + 9$$

$$\rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \rightarrow 1+x = 1 \rightarrow x = 0$$

۲۳۳

$$\xrightarrow{x \geq 0} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) \rightarrow (1 - \sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x})$$

$$\rightarrow (1 + \sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x}) - (1 - \sqrt{x}) = 0$$

$$1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 1 = \sqrt{x} \rightarrow x = 1 \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = 1 - 1 \checkmark$$

$$\rightarrow (1 - \sqrt{x})((1 + \sqrt{x})^2 - 1) = 0$$

$$(1 + \sqrt{x})^2 = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} = 1 - 0 \checkmark$$

۲۳۴

الف

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1 \rightarrow 2\sqrt{2t-1} = t+1$$

$$\rightarrow (2\sqrt{2t-1})^2 = (t+1)^2 \rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2$$

$$\rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 \rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow (t-1)(t-5) = 0$$

$$\rightarrow t-1=0 \rightarrow \boxed{t=1}, \quad t-5=0 \rightarrow \boxed{t=5}$$

$$2x = 1 - \sqrt{2-x} \rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - 2x$$

$$\rightarrow 2-x = (1-2x)^2 \rightarrow 2-x = 1-4x+4x^2 \rightarrow 4x^2-3x-1=0$$

$$\rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 9+16 = 25 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{u-3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \rightarrow u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow 12 = 3u \rightarrow u = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x-2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\sqrt{2+x} = x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2+x = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ق} \\ x=-1 \text{ غ ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

$$\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 15 + \sqrt{2x+80} = 25 \rightarrow \sqrt{2x+80} = 10 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2x+80 = 100 \rightarrow x=10 \text{ ق}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+6} = 1 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{3x+6} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x+3 = 1 + 2\sqrt{3x+6} + 3x+6 \rightarrow -2x-4 = 2\sqrt{3x+6}$$

$$\rightarrow -x - 2 = \sqrt{3x + 6} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 + 4x + 4 = 3x + 6 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\times \sqrt{x}} x + 1 = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x + 1)^2 = 4x \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4x \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = t \rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \frac{2x+1}{x-1} = 1$$

$$2x + 1 = x - 1 \rightarrow x = -2 \text{ غ ق}$$

ج

$$A \times B \times C \times \dots = 0 \rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0 \text{ یا } C = 0 \text{ یا } \dots$$

$$x(x^2 - 9)(\sqrt{x-2}) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \\ \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}_x = x^2 \rightarrow x + x = x^2 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2 \rightarrow \sqrt[3]{2x-6} = \sqrt{x+1} - 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} 2x - 6 = (x+1) \sqrt{x+1} - 6(x+1) + 12\sqrt{x+1} - 8$$

$$\rightarrow (x+13)\sqrt{x+1} = 8(x+1) \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x+13)^2(x+1) = 64(x+1)^2 \rightarrow (x+1) \underbrace{((x+13)^2 - 64(x+1))}_{\substack{x^2 - 24x + 105 \\ (x-3)(x-35)}} = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x-3)(x-35) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 3 \text{ ق ق} \\ x = 35 \text{ ق ق} \end{cases}$$